

# 表面粗糙峰坐标点云重构的金属-橡胶接触分析

邹龙庆<sup>1</sup>, 黄聪聪<sup>1</sup>, 付海龙<sup>1,2</sup>, 王玥<sup>1</sup>

(1.东北石油大学 机械科学与工程学院, 黑龙江 大庆 163318;

2.东北石油大学 环渤海能源研究院, 河北 秦皇岛 066004)

**摘要:** **目的** 通过金属-橡胶微观接触面粗糙峰坐标点云重构, 建立外部载荷与接触面积、微观接触状态之间的联系。**方法** 基于粗糙表面的自相关函数和高斯分布函数, 获得金属-橡胶粗糙接触面数据点云坐标, 利用 ANSYS APDL 方法, 建立金属-橡胶接触模型, 对两种表面粗糙度 (分别为 1.6  $\mu\text{m}$  和 3.2  $\mu\text{m}$ ) 的 4 种接触情形进行有限元接触分析, 确定模型的可靠性。**结果** 随着外部载荷的增加, 经数据点云重构后的粗糙表面, 其接触面积呈非线性增加。载荷较小时, 外加载荷每增加 0.1 MPa, 接触面积增加约 6%; 大载荷时, 外加载荷每增加 0.1 MPa, 接触面积增加约 1.5%。接触状态中, 滑移占比为 12% 左右, 近场和粘着呈完全相反的变化趋势。**结论** 随着外加载荷的增加, 界面的真实接触面积呈幂指关系增加。同一载荷下, 真实接触面积随表面粗糙度的增加而减小; 随着外加载荷的增加, 界面间的接触状态由近场接触向粘着接触转变。接触面积和粘着状态是界面间磨损粒子的分布范围和大小确定因素, 对于准确描述载荷传递和随之发生的磨损过程有着重要意义。根据橡胶表面的应力分布和变形情况, 解释了粘着接触状态促使橡胶一侧微凸体脱落成为磨损颗粒, 证明磨粒磨损是刚柔接触界面的主要磨损形式。

**关键词:** 粗糙表面重构; 刚柔接触; 接触面积; 接触状态; 磨损; 橡胶

**中图分类号:** TH117.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3660(2021)10-0255-08

**DOI:** 10.16490/j.cnki.issn.1001-3660.2021.10.025

## Metal-Rubber Rigid Soft Contact Analysis Based on Gaussian Rough Surface

ZOU Long-qing<sup>1</sup>, HUANG Cong-cong<sup>1</sup>, FU Hai-long<sup>1,2</sup>, WANG Yue<sup>1</sup>

(1.College of Mechanical Science and Engineering, Northeast Petroleum University, Daqing 163318, China;

2.Bohai Rim Energy Research Institute, Northeast Petroleum University, Qinhuangdao 066004, China)

**ABSTRACT:** The purpose of this study is to establish the relationship between the macroscopic contact area and the microscopic contact state through the reconstruction of the rough peak coordinate point cloud of the metal-rubber microcontact

收稿日期: 2020-11-30; 修订日期: 2021-04-13

Received: 2020-11-30; Revised: 2021-04-13

基金项目: 东北石油大学国家自然科学基金培育基金重点项目 (2017PYZL-04); 黑龙江省留学归国人才资助项目 (2019-277)

**Fund:** Supported by Cultivation Project of National Natural Foundation in Northeast Petroleum University (2017PYZL-04), and Program for Overseas Returned Researcher in Heilongjiang Province (2019-277)

作者简介: 邹龙庆 (1962—), 男, 博士, 教授, 现从事流体密封与测控技术研究工作。

**Biography:** ZOU Long-qing (1962—), Male, Doctor, Professor, Research focus: fluid sealing and measurement control technology.

通讯作者: 付海龙 (1978—), 男, 博士, 副教授, 现从事摩擦力学与接触界面能量控制方向研究工作。

**Corresponding author:** FU Hai-long (1978—), Male, Doctor, Associate professor, Research focus: friction mechanics and energy control on contact interface.

引文格式: 邹龙庆, 黄聪聪, 付海龙, 等. 表面粗糙峰坐标点云重构的金属-橡胶接触分析[J]. 表面技术, 2021, 50(10): 255-262.

ZOU Long-qing, HUANG Cong-cong, FU Hai-long, et al. Metal-rubber rigid soft contact analysis based on gaussian rough surface[J]. Surface technology, 2021, 50(10): 255-262.

surface. Based on the autocorrelation function and Gaussian distribution function of rough surface, the data point cloud coordinates of rubber-metal rough contact surface were obtained. ANSYS APDL method was used to establish the metal-rubber contact model, and the reliability of the model was determined through the finite element contact analysis of  $Ra$  is 1.6  $\mu\text{m}$  and 3.2  $\mu\text{m}$ , two surface roughness and four contact situations. The contact area of the rough surface reconstructed by the data point cloud increased non-linearly with the increase of external load. When the load was small, the contact area increased by about 6% when the external load increases by 0.1 MPa. When the load was large, the contact area increased by about 1.5% when the external load increased by 0.1 MPa. In the contact state, the slippage accounted for about 12%, and the near field and adhesion showed a completely opposite trend. With the increase of external load, the real contact area of the interface increases nonlinearly. Under the same load, the real contact area decreases with the increase of surface roughness. With the increase of external load, the contact state between interfaces changed from near-field contact to adhesive contact. Contact area and adhesion state are the determining factors of the distribution range and size of interfacial wear particles, which is of great significance to accurately describe the load transfer and subsequent wear process. According to the stress distribution and deformation of rubber surface, it is explained that the adhesive contact state causes the rubber side of the micro-bulge to fall off into wear particles, and it is proved that abrasive wear is the main wear form of rigid and flexible contact interface.

**KEY WORDS:** rough surface reconstruction; rigid and soft contact; contact area; contact state; wear; rubber

橡胶和硬基材之间的摩擦接触广泛存在于工业生产中。真实机械加工表面实际上是由大量形状不一的微凸体构成<sup>[1]</sup>, 接触通常只发生在微凸体上, 导致接触不连续, 真实接触面积远小于理论接触面积, 如图1所示<sup>[2]</sup>。表面形貌对接触界面之间的接触状态、摩擦磨损等有很大影响<sup>[3-4]</sup>。

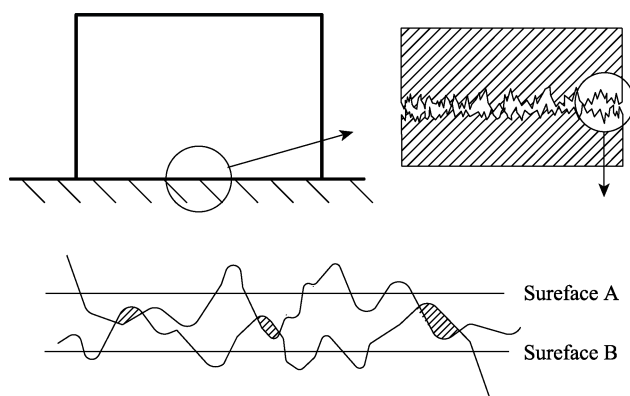


图1 真实粗糙表面的接触形式<sup>[2]</sup>  
Fig.1 Real rough surface contact<sup>[2]</sup>

Greenwood 和 Williamson<sup>[5]</sup>假设所有的微凸体都有相同的曲率半径, 且其高度在均值附近随机分布, 将 Hertz 模型推广至随机粗糙表面。国内外学者<sup>[6-10]</sup>将 G-W 模型成功用于两个粗糙表面间的接触问题的研究。理想的接触模型应尽可能全面地包含原始的形貌信息, 以更加精准地表征粗糙表面。研究发现, 有限元接触分析是一种准确模拟接触过程中表面粗糙峰、谷相互作用的有效手段<sup>[11]</sup>。Pei<sup>[12]</sup>通过刚性平面和分形表面之间的有限元计算, 发现接触面积与施加载荷呈正相关。Kogut<sup>[13]</sup>得到了零件表面接触力与接触面积的近似方程。Yastrebov<sup>[14]</sup>基于简化的弹

塑性材料和刚性平面的接触模型, 通过建立刚-柔接触, 分析载荷-位移曲线, 获得了真实的接触面积。赖联锋<sup>[15]</sup>研究了微凸体曲率半径对粗糙表面磨损量的影响。

上述研究较好地完成了刚性平面-柔性表面接触问题研究, 但是针对金属-橡胶的接触问题, 因橡胶材料的超弹性<sup>[16]</sup>和非线性<sup>[17]</sup>, 使金属和橡胶表面每对微凸体的接触都呈现非线性特征。从微观角度看, 除了要考虑粗糙峰沿高度上的分布外, 其空间分布也不应被忽略<sup>[18]</sup>。故通过接触面积确定两个粗糙面间的范德华力, 描述其接触状态, 并确定界面间磨损粒子的形成方式具有科学意义。因此, 本文以 G-W 模型为依据, 通过获取金属-橡胶接触面的坐标点云, 以重构实际粗糙表面, 获得外部载荷、接触面积、接触状态三者之间的关系, 探究金属-橡胶接触过程中, 表面粗糙度和外部载荷对其接触界面摩擦磨损特性的影响。

## 1 粗糙表面的弹性接触理论

图2为两个随机粗糙表面的接触模型<sup>[19]</sup>, 当  $z > h$  时, 两表面发生接触, 其发生概率为:

$$Pz > h = \int_h^{\infty} \varphi(z) dz \quad (1)$$

若随机表面的微凸体数为  $n$ , 则产生接触的微凸体数  $m$  为:

$$m = n \int_h^{\infty} \varphi(z) dz \quad (2)$$

由 Hertz 接触模型, 单个微凸体的接触面积  $\Delta A$  为:

$$\Delta A = \pi(z - h)R \quad (3)$$

则实际接触面积  $A_c$  为:

$$A_t = m\Delta A = n\pi R \int_h^\infty (z-h)\varphi(z)dz \quad (4)$$

单个微凸体承受的载荷  $\Delta p$  为：

$$\Delta p = \frac{4}{3} E^* R^{\frac{1}{2}} (z-h)^{\frac{3}{2}} \quad (5)$$

则微凸体承受的总载荷  $p$  为：

$$p = m\Delta p = \frac{4}{3} n E^* R^{\frac{1}{2}} \int_h^\infty (z-h)^{\frac{3}{2}} \varphi(z) dz \quad (6)$$

假设粗糙表面轮廓高度服从高斯指数型分布，令  $\varphi(z) = \exp(-z/\sigma)$ ，则有：

$$A_t = n\pi R \sigma^2 \exp(-h/\sigma) \quad (7)$$

$$p = \frac{4}{3} n E^* R^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{3}{2}} \exp(-h/\sigma) \quad (8)$$

式中： $z$  为轮廓高度； $h$  为两表面中心距； $R$  为等效曲率半径， $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ，其中  $R_1$ 、 $R_2$  分别为两表面微凸体的曲率半径； $E^*$  为等效弹性模量， $\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$ ，其中  $E_1$  和  $E_2$ 、 $\nu_1$  和  $\nu_2$  分别为两表面的弹性模量和泊松比； $\sigma$  为等效均方根值， $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ ，其中  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  分别为两表面高度分布的均方根值。

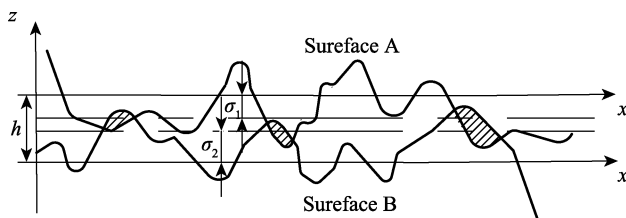
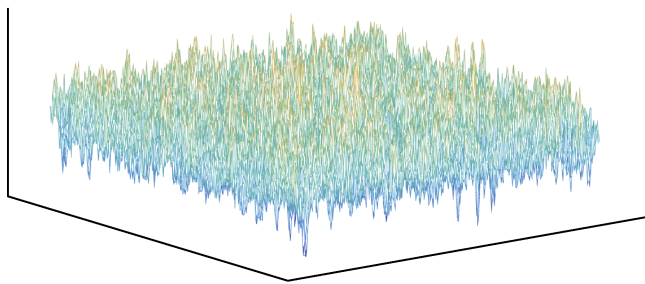


图 2 两随机粗糙表面接触  
Fig.2 Contact of two random rough surfaces



a 粗糙表面坐标点云

## 2 粗糙表面重构

目前，通过有限元建模对接触表面进行描述的主流方法包括：确定性描述<sup>[20]</sup>、分形描述<sup>[21]</sup>、统计描述<sup>[22-23]</sup>。前两种方法通常受限于测量装置的精度，后者则利用统计学方法将一个包含多尺度信息的粗糙表面简化为单一尺度，大大降低了建模成本。为此，本文基于统计描述法，通过自相关函数和高度分布函数<sup>[24]</sup>获得随机粗糙表面数据云点的坐标值，再利用 ANSYS 对粗糙表面进行重构，具体思路如图 3 所示。

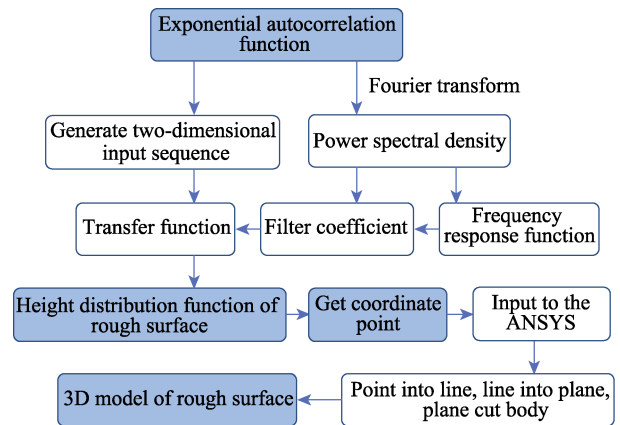
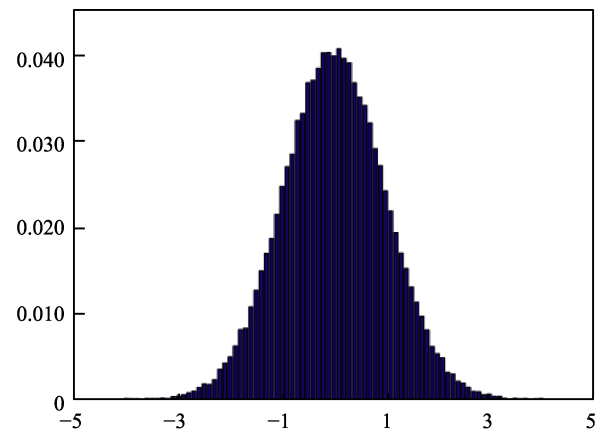


图 3 粗糙表面重构过程  
Fig.3 Process of rough surface reconstruction

图 4a 为利用高度分布函数和自相关函数在 MATLAB 中重构的粗糙表面坐标点云分布，图 4b 为所生成表面的高度分布。分别建立表面粗糙度为  $1.6 \mu\text{m}$  和  $3.2 \mu\text{m}$  的金属-橡胶模型，进而得到 M1.6-R1.6、M1.6-R3.2、M3.2-R1.6、M3.2-R3.2（M 表示金属，R 表示橡胶，下同）的 4 组装配模型。图 5 为 ANSYS 有限元模型重构过程及装配结果，其中橡胶的尺寸为  $100 \mu\text{m} \times 100 \mu\text{m} \times 40 \mu\text{m}$ ，金属的尺寸为  $100 \mu\text{m} \times 100 \mu\text{m} \times 10 \mu\text{m}$ 。



b 表面轮廓高度分布

图 4 粗糙表面的统计学描述

Fig.4 Statistical description of rough surfaces: a) rough surface coordinates; b) height distribution of surface

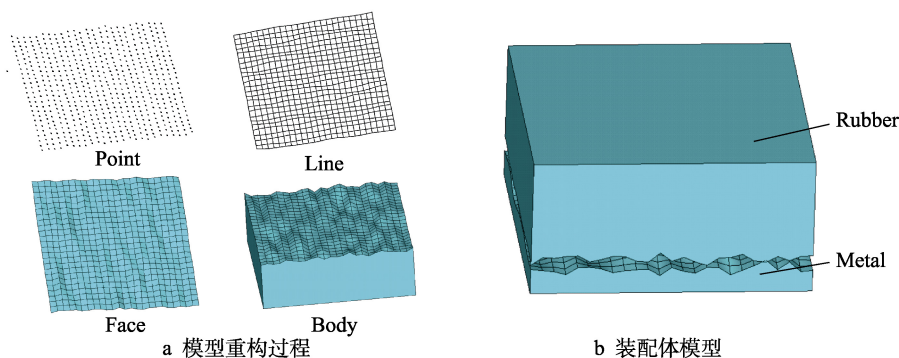


图5 随机粗糙表面接触模型

Fig.5 Geometric model of random rough surface contact: a) model reconstruction process; b) assembly model

### 3 接触分析

#### 3.1 有限元模拟

对金属-橡胶接触进行分析时,金属选用结构钢,橡胶为丁腈橡胶,采用 Mooney-Rivlin 本构模型<sup>[25]</sup>,选择的参数为:  $C_{10}=4.622$  MPa,  $C_{01}=-1.548$  MPa,  $D_1=0.00654$ 。由于二者硬度相差较大,所以设置结构钢为刚体,橡胶为柔性体,在网格划分时,刚体只会在接触表面生成网格,提高计算效率。接触问题和橡胶材料的非线性特征导致接触分析求解收敛困难,因

此除局部加密外,还应设置低阶单元,并引入非线性自适应网格,以提高其收敛性,网格划分结果如图6所示,共产生73294个节点,391070个单元。用 SOLID186 单元定义实体,用 TARGE170 单元定义目标面,用 CONTA174 单元定义接触面,形成接触对如图7所示。在刚体底部施加“体-地面”绑定约束,在橡胶侧面施加位移约束,同时释放  $z$  方向的自由度,在橡胶顶面施加不同数值的法向载荷  $p$ 。此外,还应通过调整初始接触状态、接触刚度和打开大变形等手段来提高计算的准确性。

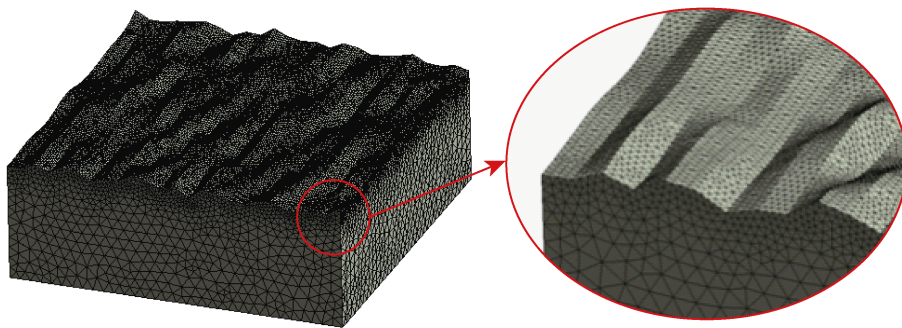


图6 网格划分及接触面网格细化

Fig.6 Mesh division and refinement of contact surface

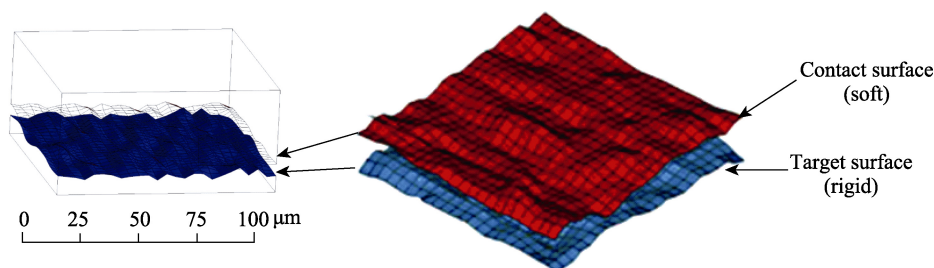


图7 接触界面模型

Fig.7 Model of contact interface

#### 3.2 结果与分析

如前所述,接触表面间的真实接触面积与摩擦、磨损等诸多物理现象有着密切联系,因此获得载荷和接触面积之间的映射关系,一直是粗糙表面接触分析

所关注的重点<sup>[26-27]</sup>。图8为不同载荷作用下 M1.6-R1.6 模型的接触面积云图。可以直观地看到,接触面积随外加载荷的增加而增加。考虑到微观表面微凸体的相互作用,两表面在低载荷下发生接触时,部分较高的



微凸体首先发生接触，并很快产生较大变形，其接触应力到达屈服极限而产生塑性变形，此后接触点的应力不再变化，当载荷持续增大时，只能让更多的微凸体产生接触，直到能完全支持外部载荷为止。

随着外部载荷的增加，界面间接触面积呈非线性增加，如图 9 所示。载荷较低时，外加载荷每增加 0.1 MPa，接触面积增加 6%左右；载荷较大时，外加

载荷每增加 0.1 MPa，接触面积增加 1.5%左右。同一载荷不同粗糙度的接触表面，粗糙度越大，接触面积越小。分析认为，表面粗糙度越大，微凸体之间的高度差就越大，随着载荷的增加，在达到屈服极限之前，弹性体产生的形变也越大，所承受的载荷也更多，因此后续承受载荷产生接触的微凸体数目相对减少，真实接触面积也就减小。

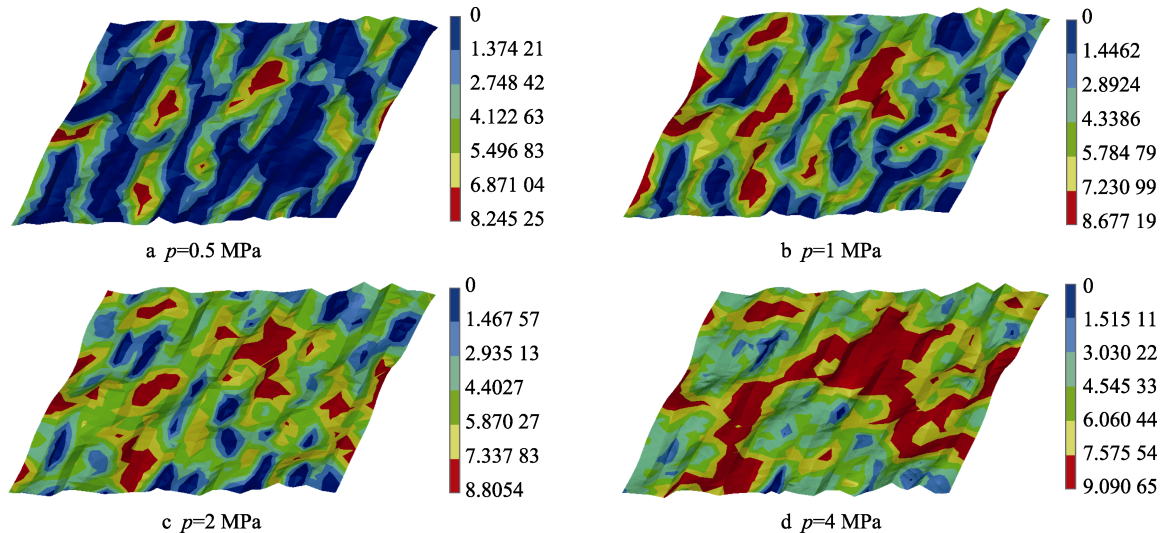


图 8 不同载荷下 M1.6-R1.6 模型的接触面积云图  
Fig.8 Model M1.6-R1.6 contact area under different loads

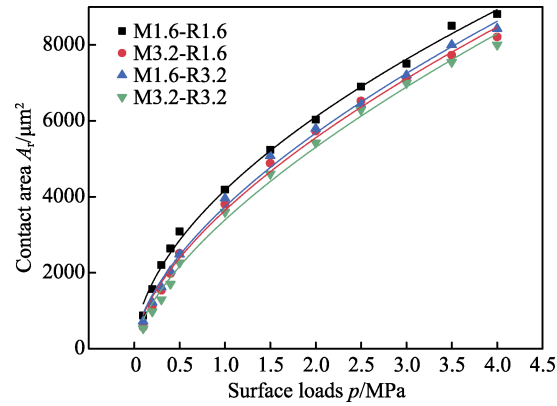


图 9 不同粗糙度表面外部载荷与接触面积的关系  
Fig.9 Relationship between surface loads with different roughness and contact area

Yashima<sup>[28]</sup>利用特殊模具制得了微凸体随机分布的橡胶表面，研究了其与光滑刚性透镜之间的接触情况，通过对微触点处的透射光进行成像，测量不同载荷下的真实接触面积，发现二者呈幂指关系。因为玻璃-橡胶和金属-橡胶都是典型的刚柔接触，所以本文用指数关系来对仿真数据进行拟合，即：

$$A_r = ap^b \tag{9}$$

其中，待定系数  $a$  和  $b$  由材料属性和表面形貌确定。利用 Levenberg-Marquardt 算法对图 9 中的数据

表 1 4 种接触模型的参数  
Tab.1 Parameters of the four contact models

Contact models	$a$	$b$	Correlation index
M1.6-R1.6	4174	0.548	0.9969
M1.6-R3.2	3797	0.603	0.9960
M3.2-R1.6	3710	0.609	0.9946
M3.2-R3.2	3570	0.645	0.9947

根据式 (9) 和表 1 中参数  $a$ 、 $b$  的值，得到不同粗糙度表面接触时接触面积和外部载荷的关系。从式 (10) — (13) 可以发现，载荷较低时，接触面积将随着表面粗糙度的增加而减小，当载荷足够大时，接触面积会随着表面粗糙度的增加而增加，且其趋势越来越明显。通常情况下，理论接触面积相同时，粗糙度大的表面，其实际面积也更大。假设在某一载荷作用下，产生接触的微凸体数目不变，若继续增加载荷，粗糙表面体积较大的微凸体会贡献更大的接触面积，使接触面积随粗糙度的增加而增大。

$$\text{M1.6-R1.6: } A_r = 4174p^{0.548} \tag{10}$$

$$\text{M1.6-R3.2: } A_r = 3797p^{0.603} \tag{11}$$

$$\text{M3.2-R1.6: } A_r = 3710p^{0.609} \tag{12}$$

$$\text{M3.2-R3.2: } A_r = 3570p^{0.645} \tag{13}$$

根据上述接触非线性分析，按接触面距目标面的距离大小，将接触分为远离、近场、粘着、滑移 4 种

状态。图 10 为不同载荷下 M1.6-R1.6 接触模型的接触状态云图, 红色表示发生接触的微凸体面积 (粘着状态), 黄色部分则为非接触面积 (近场状态), 蓝色

边界则为二者的过渡区域 (滑移状态)。随着外部载荷和表面粗糙度的改变, 界面接触状态发生了显著变化, 近场接触明显减少, 粘着接触明显增加。

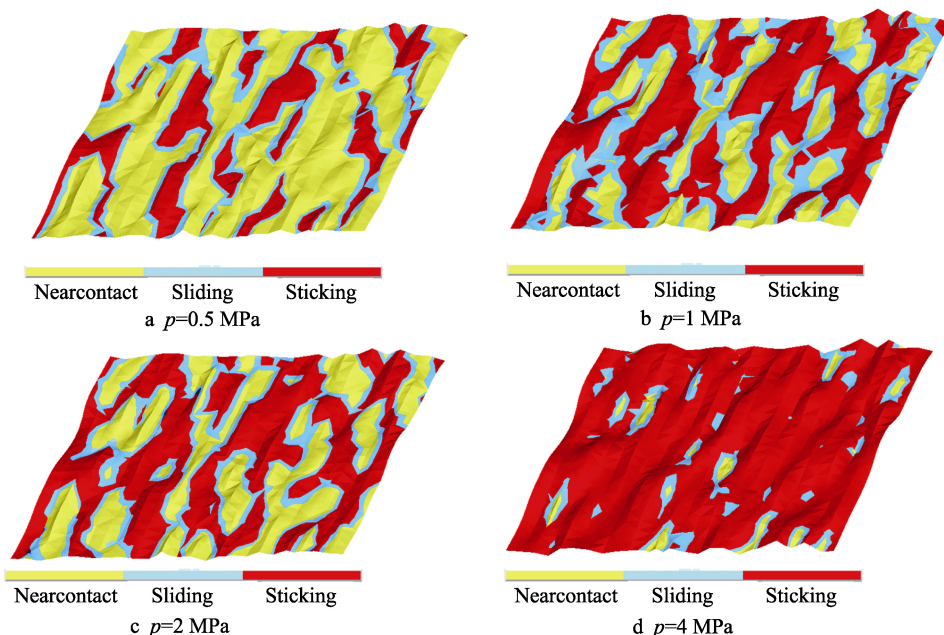


图 10 不同载荷下 M1.6-R1.6 模型的接触状态  
Fig.10 Contact state Model M1.6-R1.6 under different loads

图 11 描述了不同载荷下界面接触状态的变化趋势。载荷较小时, 接触状态以近场接触为主, 占接触界面的 75%以上, 滑移和粘着的占比均在 10%左右。随着载荷的增加, 近场接触的占比先呈线性下降, 后趋于平缓; 粘着接触的占比变化呈现出与近场接触完全相反的趋势; 滑移接触的占比变化趋势整体比较平缓, 在 12%左右浮动。分析认为, 上述现象的产生源于橡胶的弹性模量较小, 微凸体在外加载荷的作用下易发生变形, 近场接触逐渐向下一接触状态过渡。随着外加载荷的持续增加, 橡胶微凸体会持续变形, 与金属微凸体发生错峰滑移, 因此滑移接触占比逐渐增加。由于橡胶材料的超弹特性, 最开始产生接触的橡胶微凸体, 完全填充到金属粗糙表面的凹谷中, 并相

互啮合, 不再产生相对位移, 近场接触和滑移接触大部分都过渡成粘着接触。

图 12 为不同粗糙度表面接触状态随载荷的变化趋势。实际上, 近场接触对于磨损的影响甚微, 这里着重讨论滑移接触和粘着接触随粗糙度变化的趋势。对于粘着接触, 当载荷较小时, 接触中发生粘着的面积占比相差不大; 当载荷较大时, 接触界面更加粗糙, 发生粘着接触的占比越低。分析认为, 粗糙度越大, 微凸体的体积就更大, 因此需要消耗更多的能量才能使界面间的接触状态从滑移接触过渡到粘着接触。对于滑移接触, 表面越粗糙, 滑移接触占比越高。这是因为微凸体的高度差越大, 外加载荷作用下, 微凸体之间的滑移距离就越大, 滑移接触占比也随之增加。

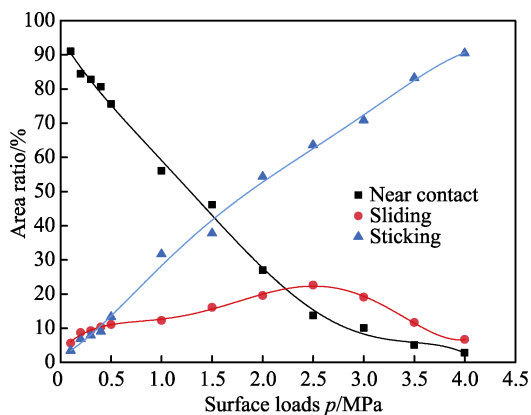


图 11 同一模型接触状态随载荷的变化曲线  
Fig.11 Curve of contact state with load for the model

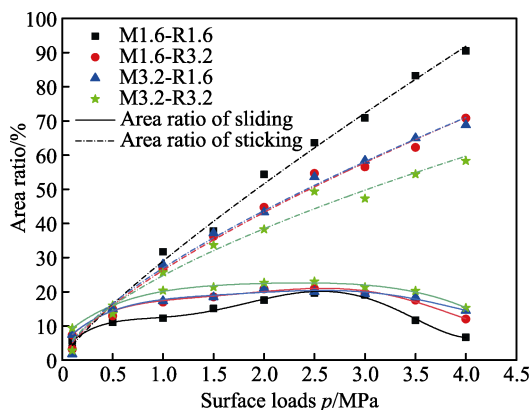


图 12 接触状态随粗糙度的变化曲线  
Fig.12 Curve of contact state with roughness

载荷为 2 MPa 时, 模型 M1.6-R3.2 中橡胶材料的接触应力和总变形如图 13 所示。接触应力集中分布在微凸体的凸起或凹谷中, 较大的变形则多发生在凸起的地方。结合粘着接触状态可以想象, 两个微凸体在外加载荷作用下相互啮合, 粘结在一起, 由于应力集中, 较软一方的微凸体产生大变形而被撕裂, 脱落成为磨粒。因此, 界面间发生粘着接触的范围决定着磨损界面磨粒的分布范围。

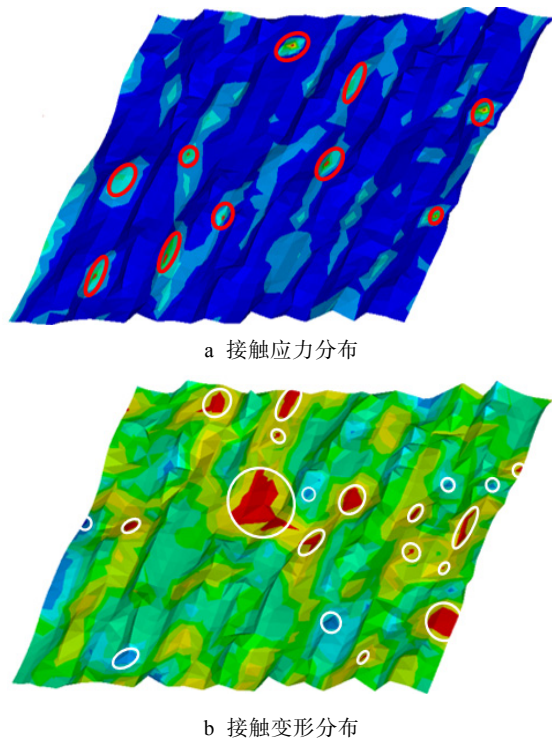


图 13 橡胶的接触应力和总变形分布

Fig.13 Distribution of contact stress and total deformation of rubber: a) distribution of contact stress; b) distribution of large deformation

通过接触面积确定两个粗糙面间因分子间相互作用而产生的范德华力的分布范围, 突破了仅考虑高度分布的高斯分布的局限性, 进一步解释了粘着接触导致界面间磨损粒子大小改变的机理, 这对于准确描述载荷传递和随之发生的磨损过程有着重要意义。在外加载荷作用下, 产生接触的微凸体数量增加, 两个粗糙表面发生粘着的微凸体数量随之增加。在发生错峰滑移之前, 微凸体上的应力远超其强度极限, 在金属-橡胶接触中, 橡胶的相对硬度很小, 橡胶微凸体被撕裂并脱落成磨损颗粒。上述行为再次验证了磨粒磨损是金属-橡胶刚柔接触界面的主要磨损形式。

## 4 结论

本文针对金属-橡胶变形接触问题, 从微观角度出发, 提出了橡胶接触面粗糙峰坐标点云重构的方法, 实现了对金属-橡胶“刚柔”接触的分析, 得出

以下结论:

1) 随着外加载荷的增加, 界面真实接触面积呈非线性增加, 对不同粗糙度的接触表面, 接触面积随载荷的变化趋势基本一致。在同一载荷下, 真实接触面积随粗糙度的增加而减小; 当载荷足够大时, 接触面积会随着表面粗糙度的增加而增加, 且增加趋势显著。

2) 初始接触时, 界面间的接触状态以近场接触为主, 随着外加载荷的增加, 近场接触向粘着接触转变, 在整个接触过程中, 滑移接触的占比较为稳定。

3) 在金属-橡胶接触中, 接触面积和接触状态共同决定了接触界面间产生的磨粒大小及分布范围, 其中, 接触状态起主要作用。从橡胶的应力分布和变形情况可以看出, 橡胶表面的微凸体更容易脱落而形成磨粒, 证明磨粒磨损是金属-橡胶接触界面的主要磨损形式。

## 参考文献:

- [1] CARPICK R W. The contact sport of rough surfaces[J]. Science, 2018, 359(6371): 38.
- [2] 姬翠翠, 朱华. 粗糙表面分形接触模型的研究进展[J]. 润滑与密封, 2011, 36(9): 114-119.  
JI Cui-cui, ZHU Hua. Research progress on M-B fractal contact model[J]. Lubrication engineering, 2011, 36(9): 114-119.
- [3] CHEN Zhi-ying, LIU Yong, ZHOU Ping. A comparative study of fractal dimension calculation methods for rough surface profiles[J]. Chaos, solitons & fractals, 2018, 112: 24-30.
- [4] BERGSETH E, SJÖBERG S, BJÖRKLUND S. Influence of real surface topography on the contact area ratio in differently manufactured spur gears[J]. Tribology international, 2012, 56: 72-80.
- [5] GREENWOOD J A, WILLIAMSON J. Contact of nominally flat surfaces[J]. Proceedings of the Royal Society of London, 1966, 295(1442): 300-319.
- [6] WHITEHOUSE D J, PHILLIPS M J. Sampling in a two-dimensional plane[J]. Journal of physics A: Mathematical and general, 1985, 18(13): 2465-2477.
- [7] WHITEHOUSE D J, PHILLIPS M J. Discrete properties of random surfaces[J]. Philosophical transactions of the Royal Society A: Mathematical and physical sciences, 1978, 290(1369): 267-298.
- [8] CHANG W R, ETSION I, BOGY D B. An elastic-plastic model for the contact of rough surfaces[J]. Journal of tribology, 1987, 109(2): 257-263.
- [9] GHAEDEHIA H, WANG Xian-zhang, SAHA S, et al. A review of elastic-plastic contact mechanics[J]. Applied mechanics reviews, 2017, 69(6): 060804.



- [10] 班力壬, 戚承志, 单仁亮, 等. 考虑微凸体曲率半径变化的 GW 改进模型[J]. 矿业科学学报, 2018, 3(5): 442-450.  
BAN Li-ren, QI Cheng-zhi, SHAN Ren-liang, et al. An improved GW model considering the changing curvature radius of asperities[J]. Journal of mining science and technology, 2018, 3(5): 442-450.
- [11] 梁春. 基于三维真实粗糙表面的弹塑性接触有限元分析[D]. 镇江: 江苏大学, 2009.  
LIANG Chun. Finite element analysis based on elasto-plastic contact of 3D real rough surface[D]. Zhenjiang: Jiangsu University, 2009.
- [12] PEI L, HYUN S, MOLINARI J F, et al. Finite element modeling of elasto-plastic contact between rough surfaces[J]. Journal of the mechanics and physics of solids, 2005, 53(11): 2385-2409.
- [13] KOGUT L, ETSION I. A finite element based elastic-plastic model for the contact of rough surfaces[J]. Tribology transactions, 2003, 46(3): 383-390.
- [14] YASTREBOV V A, DURAND J, PROUDHON H, et al. Rough surface contact analysis by means of the finite element method and of a new reduced model[J]. Comptes rendus mécanique, 2011, 339(7-8): 473-490.
- [15] 赖联锋, 高诚辉, 黄健萌. 双粗糙表面磨削过程微凸体曲率半径的影响分析[J]. 表面技术, 2017, 46(1): 100-105.  
LAI Lian-feng, GAO Cheng-hui, HUANG Jian-meng. Effects of curvature radius of asperity on micro-grinding model[J]. Surface technology, 2017, 46(1): 100-105.
- [16] 李晓芳, 杨晓翔. 橡胶材料的超弹性本构模型[J]. 弹性体, 2005, 15(1): 50-58.  
LI Xiao-fang, YANG Xiao-xiang. A review of elastic constitutive model for rubber materials[J]. China elastomerics, 2005, 15(1): 50-58.
- [17] 于海富, 李凡珠, 杨海波, 等. 橡胶材料非线性高弹-粘弹性本构模型的研究[J]. 橡胶工业, 2017, 64(12): 719-723.  
YU Hai-fu, LI Fan-zhu, YANG Hai-bo, et al. Study on nonlinear hyper-viscoelastic constitutive model for rubber composite[J]. China rubber industry, 2017, 64(12): 719-723.
- [18] 炊明伟, 冯有前, 王崴, 等. 三维高斯粗糙表面数字化模拟方法[J]. 表面技术, 2013, 42(2): 63-65.  
CHUI Ming-wei, FENG You-qian, WANG Wei, et al. Numerical simulation method of 3D Gaussian rough surface[J]. Surface technology, 2013, 42(2): 63-65.
- [19] POPOV V L. Contact mechanics and friction: Physical principles and applications[M]. Berlin: Springer, 2010: 13-16.
- [20] 孙见君, 嵇正波, 马晨波. 粗糙表面接触力学问题的重新分析[J]. 力学学报, 2018, 50(1): 68-77.  
SUN Jian-jun, JI Zheng-bo, MA Chen-bo. Reanalysis of the contact mechanics for rough surfaces[J]. Theoretical and applied mechanics, 2018, 50(1): 68-77.
- [21] MAJUMDAR A, BHUSHAN B. Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces[J]. Journal of tribology, 1990, 112(2): 205-216.
- [22] LIU Geng, WANG Qian, LIN C. A survey of current models for simulating the contact between rough surfaces[J]. Tribology transactions, 1999, 42(3): 581-591.
- [23] 张流强, 肖海军, 董海龙. 粗糙表面的统计研究[J]. 表面技术, 2011, 40(4): 96-100.  
ZHANG Liu-qiang, XIAO Hai-jun, DONG Hai-long. Statistics on rough surfaces[J]. Surface technology, 2011, 40(4): 96-100.
- [24] 林炜轩, 王江涌. 高度分布函数与自相关函数对表面粗糙度参数的影响[J]. 表面技术, 2017, 46(1): 241-249.  
LIN Wei-xuan, WANG Jiang-yong. Effects of autocorrelation function and height distribution function on the 3D surface roughness parameters[J]. Surface technology, 2017, 46(1): 241-249.
- [25] 胡霞. FZ35-105 闸板防喷器胶芯密封机理研究[D]. 荆州: 长江大学, 2016.  
HU Xia. Research on theory of FZ35-105 ram BOP rubber core sealing[D]. Jingzhou: Yangtze University, 2016.
- [26] 王世军, 何花兰, 郭璞, 等. 粗糙表面接触面积和承载规律的研究[J]. 西安理工大学学报, 2014, 30(1): 22-27.  
WANG Shi-jun, HE Hua-lan, GUO Pu, et al. Research on contact area and load carrying capacity between coarse surfaces[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2014, 30(1): 22-27.
- [27] LI Lei-tao, LIANG Xuan-ming, XING Yu-zhe, et al. Measurement of real contact area for rough metal surfaces and the distinction of contribution from elasticity and plasticity[J]. Journal of tribology, 2021, 143(7): 071501.
- [28] YASHIMA S, ROMERO V, WANDERSMAN E, et al. Normal contact and friction of rubber with model randomly rough surfaces[J]. Soft matter, 2015, 11(5): 871-881.