

膜层材料与技术

各向异性硬质薄膜/柔软基底系统的表面屈曲分析

陈智轩, 国凤林

(上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240)

摘要: **目的** 研究有限尺寸矩形正交各向异性薄膜/基底系统在单向压缩下的表面屈曲。**方法** 采用 Kirchhoff-Love 薄板理论和 von Kármán 板理论分析了临界应变和后屈曲形貌演化, 考察了材料的各向异性性质及薄膜的几何参数对表面屈曲行为的影响。**结果** 一般来说, 薄膜/基底系统的初始屈曲总是对应于多个波峰, 在薄膜长度相同的条件下, 薄膜宽度的改变可以影响波峰的数目。在薄膜的各向异性性质特别强烈的时候, 薄膜/基底结构表现出一些显著的特点。其中之一是在外加应变超过临界应变之后, 边缘幅值随着薄膜宽度的增大而增大, 而中心幅值则急剧减小。**结论** 中心和边缘幅值的差距越来越大, 最终导致薄膜后屈曲形貌幅值在宽度方向上的巨大差异, 并预示随着外加应变的逐渐增大, 宽度方向可能演变出其他的屈曲模式。

关键词: 薄膜/基底结构; 表面屈曲; 正交各向异性薄膜; 临界屈曲应变; 屈曲形貌

中图分类号: O343.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3660(2020)10-0276-10

DOI: 10.16490/j.cnki.issn.1001-3660.2020.10.032

Analysis on Surface Buckling of Anisotropic Stiff Film/Soft Substrate System

CHEN Zhi-xuan, GUO Feng-lin

(School of Naval Architecture, Ocean & Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

ABSTRACT: The work aims to study the surface buckling of rectangular orthotropic anisotropic film/substrate system with finite length and width under unidirectional compression. The critical strain and the evolution of post-buckling morphology were analyzed by Kirchhoff-Love thin plate theory and von Kármán plate theory, and the anisotropic properties of materials and the influence of geometric parameters of thin films on surface buckling were investigated. Generally speaking, the initial buckling of the film/substrate system always happened with multiple wrinkles. Previous research demonstrated that the number of wrinkles varied with the change of the film width under the same film length. When the anisotropy of the film was very strong, the film/substrate structure showed some remarkable characteristics. One of them was that the edge amplitude increased with the rise of the film width after the applied strain exceeded the critical buckling strain, while the center amplitude decreased sharply. This phenomenon makes the difference between the edge amplitude and center amplitude larger and larger, ultimately leading to sharp change of post-buckling morphology in the width direction and indicates that other buckling pattern may appear in the

收稿日期: 2019-11-19; 修订日期: 2020-08-27

Received: 2019-11-19; Revised: 2020-08-27

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11272206)

Fund: National Natural Science Foundation of China (11272206)

作者简介: 陈智轩 (1994—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为固体力学。

Biography: CHEN Zhi-xuan (1994—), Male, Master, Research focus: solid mechanics.

通讯作者: 国凤林 (1962—), 男, 博士, 副教授, 主要研究方向为微纳米力学、断裂力学。邮箱: flguo@sjtu.edu.cn

Corresponding author: GUO Feng-lin (1962—), Male, Doctor, Associate professor, Research focus: micro nano mechanics, fracture mechanics. E-mail: flguo@sjtu.edu.cn

引文格式: 陈智轩, 国凤林. 各向异性硬质薄膜/柔软基底系统的表面屈曲分析[J]. 表面技术, 2020, 49(10): 276-285.

CHEN Zhi-xuan, GUO Feng-lin. Analysis on surface buckling of anisotropic stiff film/soft substrate system[J]. Surface technology, 2020, 49(10): 276-285.

width direction with the increase of the applied strain.

KEY WORDS: film/substrate structure; surface buckling; orthotropic anisotropic film; critical buckling strain; buckling morphology

褶皱现象在自然界中普遍存在, 比较常见的有连绵的山脉、枯萎的叶片、植物果实表面的褶皱。褶皱其实就是物体表面屈曲行为的一种表现。表面屈曲行为非常复杂, 但应用也十分广泛。实际应用时出现的复杂褶皱结构, 虽然外观形态各异, 但通常都能合理地简单描述成一层较薄、较硬的膜附着于较厚较软的基底上, 像人类的皮肤可以看作是一种硬质薄膜/柔软基底结构^[1]。人体皮肤从外到里大致分为三层: 表皮层 (epidermis)、真皮层 (dermis) 和皮下组织 (subcutaneous tissue)。表皮层最薄处仅约 50 μm , 主要由角质细胞组成, 质地坚硬; 真皮层厚度则有约 1~3 mm, 富含胶原蛋白和水分, 因而相对柔软, 这样表皮层和真皮层就形成了一个硬质薄膜/柔软基底结构。其他例如动物的小肠^[2]、汽车的电镀膜以及地球的地壳地幔^[3]都属于硬质薄膜/柔软基底结构的范畴。大量理论和实验研究表明, 只有硬质薄膜/柔软基底表面才会出现表面屈曲和褶皱, 而柔软薄膜/硬质基底表面则不会出现这类现象, 所以本文研究对象选为硬质薄膜/柔软基底。

对于薄膜/基底结构的表面屈曲, 最早的研究追溯至 1998 年哈佛大学的 Bowden 等人^[4]用实验方法诱导出了非常理想的褶皱图案, 从此引发了关于薄膜/基底结构的表面屈曲的研究热潮。人们一直在探索相关机理和规律, 比如, 薄膜/基底结构的屈曲形貌与结构自身的性质有关, 若能导出其定量关系, 就可以通过测量屈曲形貌, 反推该结构的一系列材料常数^[5]。由于硬质薄膜/柔软基底结构表面失稳形貌的形成具有自发性, 所以能够方便、快捷地制备出多种带有特殊结构的表面, 并用于改善其光、电、声学等方面的性能^[6]。最早研究硬质薄膜/柔软基底结构的 Bowden 等人^[7]就提出了一种衍射光栅的制造方法。Ma 等人^[8]进一步利用表面褶皱的光栅设计了一种微应变传感器。后来, 硬质薄膜/柔软基底结构的褶皱被广泛应用于制造半导体材料, 如具有可控屈曲形貌的半导体纳米条带^[9]。此外, 屈曲失稳可以将二维薄膜结构转变成三维的柔性结构, 因此在柔性电子器件方面得到了不少应用, 如电子眼摄像头和可折叠 LED 显示屏^[10-11]。通过屈曲可以引导材料自组装, 形成结构复杂的三维多功能电子器件, 该方法适用于从微观到宏观的各种尺度。

近年来, 学术界对表面屈曲的研究已经取得长足进展。Volynskii 等人^[12]在 2000 年首先得出表面屈曲的临界应变与薄膜及基底的弹性模量、泊松比之间的关系。之后 Cerda 与 Mahadevan^[13]利用能量方法导出了屈曲形貌与材料性质之间关系的标度律, 研究发现薄膜/

基底表面有着丰富的屈曲失稳模式, 包括直条纹 (straight stripes) 或波浪状条纹 (undulating stripes)、跳棋盘形 (checkerboard)、六边形 (hexagon)、曲张形 (varicose)、人字形 (herringbone)、迷宫形 (labyrinth)^[14-16]。Cao 等人^[17]通过有限元计算, 探索了软基体上弹塑性薄膜后屈曲模式从褶皱 (wrinkling) 到局部折痕 (creasing) 的演化过程, 发现薄膜/基底模量比和薄膜的屈服应变在后屈曲模式演化过程中起重要作用。Peterson 等^[18]发现在同样的应变水平下, 和双向压缩屈曲相比, 单向受压屈曲达到稳态的时间要长, 且屈曲幅值要小。Huang 等^[19]研究了薄膜/基底系统中, 基底的压缩-拉伸不对称性对临界屈曲应变和屈曲模式的影响。以上研究中的薄膜都是各向同性材料, 渐渐地, 关于异性薄膜/基底系统的屈曲问题也引起了学术界的关注。Zhou 和 Jiang^[20]研究了与预拉伸铁电软基底相粘结的铁电薄膜的屈曲和后屈曲现象, 考察了压电效应对临界屈曲应变的影响。Yin 和 Chen^[21]提出了一种通过应力驱动各向异性薄膜在软圆柱基底上屈曲的方式来制备螺旋齿轮状结构的有效方法。Ni 和 Soh^[22]研究了受压各向异性薄膜中屈曲-脱层的不同模式和演化规律。Yin 等^[23]采用傅立叶谱方法计算了不同载荷条件下, 各向异性薄膜/基底的屈曲模式, 发现各向异性薄膜/基底有更丰富的表面屈曲模式, 临界褶皱形貌和后屈曲演化由三个无量纲参数决定。

现有的绝大多数研究都假设半无限大基底/薄膜系统处于平面应变状态, 没有考虑薄膜有限尺寸对表面屈曲的影响。Jiang 等^[24]的实验及理论分析表明, 带状薄膜 (假设薄膜为各向同性材料) 在沿长度方向受压时产生的褶皱, 其波长与幅值均随着薄膜宽度的增大而增大。然而, Jiang 等^[24]没有考虑表面屈曲幅值沿宽度方向发生的变化。本文研究了有限长宽尺寸的矩形正交各向异性薄膜/基底系统在单向压缩下的表面屈曲, 采用 Kirchhoff-Love 薄板理论和 von Kármán 板理论分析了临界应变和后屈曲形貌演化, 考察了材料的各向异性性质及薄膜的几何参数对表面屈曲行为的影响。

1 临界应变分析

假设矩形正交各向异性硬质薄膜理想粘结于柔软基底上, 如图 1 所示, 薄膜中面与 xOy 平面重合。 x 方向长度为 a , y 方向宽度为 b , 厚度 h 很小, 基底为半空间无限大, 各方向尺寸均远大于薄膜尺寸。薄膜的变形可以用 Kirchhoff-Love 薄板理论和 von

Kármán 板理论来描述。假设该结构受到沿 x 方向的单轴压力 P 而产生压缩应变 ε 。薄膜的对边 $x=0$ 和 $x=a$ 可以近似认为是简支边界, 而另一对边 $y=\pm\frac{b}{2}$ 为自由边界。记薄膜挠度为 w , 基底对薄膜的法向作用力为 q , 数值结果表明基底对薄膜的切向作用力可以忽略^[15]。

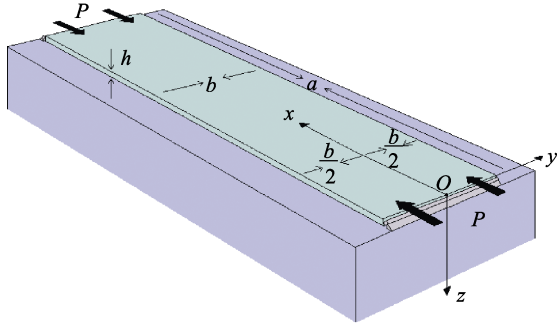


图 1 硬质薄膜/柔软基底的理论模型

Fig.1 Theoretical model of stiff film/soft substrate

正交各向异性材料有 9 个独立的弹性常数^[25], 三个弹性主方向均与坐标轴重合, 如图 1 所示。面内名义弹性常数减为 5 个: E_1 (长度方向弹性模量)、 E_2 (宽度方向弹性模量)、 ν_1 (长度方向泊松比)、 ν_2 (宽度方向泊松比)、 μ (xOy 平面的剪切模量)。根据弹性张量的对称性^[25], 有 $\frac{\nu_1}{E_1} = \frac{\nu_2}{E_2} \Rightarrow E_2 = \frac{\nu_2 E_1}{\nu_1}$, 所以其中独立的面内弹性常数只剩下 4 个。引进一系列无量纲参数: $r_\nu = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1}$, $r_\mu = \frac{2(1+\nu_1)\mu}{E_1}$, $\bar{r}_\mu = \frac{2\mu(1-\nu_1\nu_2)}{\nu_1 E_1} = \frac{(1-\nu_1\nu_2)r_\mu}{\nu_1}$, $r_E = \frac{E_1(1-\nu_s^2)}{E_s(1-\nu_1\nu_2)}$, 其中 E_s 和 ν_s 分别是基底的弹性模量和泊松比。

根据 Kirchhoff-Love 薄板理论, 正交各向异性薄膜的平衡方程^[26]为:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \left(N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - q = 0 \quad (1)$$

其中 $D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}$, $D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}$, $D_3 = \frac{\nu_2 E_1 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)} + \frac{\mu h^3}{6}$ 。薄膜发生屈曲时, 因为 $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = 0$, 所以各方向内力的表达式为 $N_{11} = -E_1 h \varepsilon_{11}$, $N_{12} = N_{22} = 0$; 基底法向作用力^[27]的表达式为 $q = -\frac{E_s k w}{2(1-\nu_s^2)}$, 其中 k 为薄膜屈曲的波数。将 r_ν 、 \bar{r}_μ 、 r_E 、 D_1 、 D_2 、 D_3 、 E_2 、 N_{11} 、 N_{12} 、 N_{22} 、 q 表达式都代入式(1), 化简得:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + r_\nu \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\nu_1(r_\nu + \bar{r}_\mu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{12\varepsilon_{11}(1-r_\nu\nu_1^2)}{h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{6kw}{r_E h^3} = 0 \quad (2)$$

设 $w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin kx$, 不失一般性, 假设薄膜为单位厚度, 即 $h=1$, 平衡微分方程及其对应的特征方程分别是:

$$\frac{d^4 Y_m}{dy^4} - \frac{2k^2 \nu_1(r_\nu + \bar{r}_\mu)}{r_\nu} \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \left[\frac{k^4}{r_\nu} - \frac{12k^2 \varepsilon_{11}(1-r_\nu\nu_1^2)}{r_\nu h^2} + \frac{6k}{r_\nu r_E h^3} \right] Y_m = 0 \quad (3)$$

$$\lambda^4 - \frac{2k^2 \nu_1(r_\nu + \bar{r}_\mu)}{r_\nu} \lambda^2 + \left[\frac{k^4}{r_\nu} - \frac{12k^2 \varepsilon_{11}(1-r_\nu\nu_1^2)}{r_\nu h^2} + \frac{6k}{r_\nu r_E h^3} \right] = 0 \quad (4)$$

易解得特征根为 $\lambda_{1,2} = \pm\alpha$, $\lambda_{3,4} = \pm\beta$, 那么方程(3)的通解^[28]为:

$$Y_m = C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 \cosh \beta y + C_4 \sinh \beta y \quad (5)$$

先考虑简支边边界条件: $x=0$ 及 $x=a$ 处 $w=0$, 应有

$$\sin kx = 0 \Rightarrow k = \frac{m\pi}{a}, \text{ 又令 } \gamma = \sqrt{1 + \frac{12r_\nu \varepsilon_{11}(1-r_\nu\nu_1^2)}{k^2 \nu_1^2(r_\nu + \bar{r}_\mu)^2} - \frac{6r_\nu + r_\nu k^3 r_E}{k^3 r_E \nu_1^2(r_\nu + \bar{r}_\mu)^2}} \in [-1, 1], \text{ 则 } \alpha、\beta \text{ 可表示为 } \alpha = \sqrt{\frac{k^2 \nu_1(r_\nu + \bar{r}_\mu)}{r_\nu}}(1+\gamma),$$

$$\beta = \sqrt{\frac{k^2 \nu_1(r_\nu + \bar{r}_\mu)}{r_\nu}}(1-\gamma), \text{ 由 } \gamma \text{ 表达式反推得 } \varepsilon_{11} = \frac{k^2 \nu_1^2(r_\nu + \bar{r}_\mu)^2}{12r_\nu(1-r_\nu\nu_1^2)} \left[\gamma^2 - 1 + \frac{6r_\nu + r_\nu k^3 r_E}{k^3 r_E \nu_1^2(r_\nu + \bar{r}_\mu)^2} \right].$$

再考虑自由边边界条件^[29]: $y=\pm\frac{b}{2}$ 处 $M_y = 0$, $M_{xy} = 0$, $F_{Sy} = 0$ 。后两个条件可合并为总的分布剪力 $F_{Sy}^t = F_{Sy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0$, 即:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{y=\pm\frac{b}{2}} = 0 \\ \left. \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left(\nu_1 + \frac{2\nu_1 \bar{r}_\mu}{r_\nu} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right|_{y=\pm\frac{b}{2}} = 0 \\ \left. \frac{d^2 Y_m}{dy^2} - \nu_1 k^2 Y_m \right|_{y=\pm\frac{b}{2}} = 0 \\ \left. \frac{d^3 Y_m}{dy^3} - \nu_1 k^2 \left(1 + \frac{2\bar{r}_\mu}{r_\nu} \right) \frac{dY_m}{dy} \right|_{y=\pm\frac{b}{2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (6)$$

代入 w 的通解, 得到关于 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 的四元齐次线性方程组。要使得 C_i ($i=1,2,3,4$) 有非零解,

则方程组的系数行列式必须为零, 薄膜屈曲模式可归类为对称模式(7)或者反对称模式(8)。

$$\begin{vmatrix} (\alpha^2 - \nu_1 k^2) \cosh\left(\frac{\alpha b}{2}\right) & (\beta^2 - \nu_1 k^2) \cosh\left(\frac{\beta b}{2}\right) \\ \left[\alpha^3 - \alpha \nu_1 k^2 \left(1 + \frac{2\bar{r}_\mu}{r_\nu}\right)\right] \sinh\left(\frac{\alpha b}{2}\right) & \left[\beta^3 - \beta \nu_1 k^2 \left(1 + \frac{2\bar{r}_\mu}{r_\nu}\right)\right] \sinh\left(\frac{\beta b}{2}\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

$$\begin{vmatrix} (\alpha^2 - \nu_1 k^2) \sinh\left(\frac{\alpha b}{2}\right) & (\beta^2 - \nu_1 k^2) \sinh\left(\frac{\beta b}{2}\right) \\ \left[\alpha^3 - \alpha \nu_1 k^2 \left(1 + \frac{2\bar{r}_\mu}{r_\nu}\right)\right] \cosh\left(\frac{\alpha b}{2}\right) & \left[\beta^3 - \beta \nu_1 k^2 \left(1 + \frac{2\bar{r}_\mu}{r_\nu}\right)\right] \cosh\left(\frac{\beta b}{2}\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

以对称模式为例, 将 α 、 β 代入式(7), 最终可得一个关于 b 、 ν_1 、 r_ν 、 r_μ 、 k 和 γ 的方程。如果 b 、 ν_1 、 r_ν 、 r_μ 均已知, 那么未知数仅剩 k 和 γ 。经过验证, 一个 k 值对应两个正负相反的 γ 值, 这里取正值, 则 $0 \leq \gamma \leq 1$ 。依次令 $m=1,2,3,\dots$, 由 $k=m\pi/a$ 生成不同 k 值, 分别代入上述方程, 得到一系列 γ 值, 继续代入 ε_{11} 表达式, 得到一系列 ε_{11} 值, 记最小值为 ε_{11}^c (称为临界应变), 相应的 γ 值写作 γ^c , 即:

$$\varepsilon_{11}^c = \frac{m^2 \pi^2 \nu_1^2 (r_\nu + \bar{r}_\mu)^2}{12 a^2 r_\nu (1 - \nu_1 \nu_2^2)} \left[(\gamma^c)^2 - 1 + \frac{6 a^3 r_\nu + r_\nu m^3 \pi^3 r_E}{m^3 \pi^3 r_E \nu_1^2 (r_\nu + \bar{r}_\mu)^2} \right] \quad (9)$$

2 参数对临界应变的影响

本节考察参数 r_ν (宽度与长度方向弹性模量之比, 若是各向同性材料则值为 1)、 r_μ (代表剪切模量与弹性模量之比, 若是各向同性材料则值为 1)、 a (薄膜长度)、 b (薄膜宽度) 对临界应变的影响。推导出正交各向异性薄膜/柔软基底的临界应变公式后, 分别绘制 ε_{11}^c 关于上述各参数的函数曲线, 如图 2 所示。

由计算结果和以上图像, 可以得出如下结论:

1) 当 a 、 b 、 r_μ 、 r_E 、 ν_1 为定值时, ε_{11}^c 随 r_ν 的增大而增大, 但当 ν_1 较小时, ε_{11}^c 随 r_ν 的增大而缓慢增大; 当 a 、 b 、 r_μ 、 r_E 、 ν_2 为定值时, 临界应变 ε_{11}^c 随 r_ν 的增大而减小, 并趋近于一个常值。

2) 令 a 、 b 、 r_μ 、 r_E 以及两泊松比之积 $\nu_1 \nu_2$ 为定值, 考察 r_ν 对 ε_{11}^c 的影响, 这其实是比较 ν_1 与 ν_2 对 ε_{11}^c 的影响能力, 结果随着 r_ν 增大 (即 ν_1 减小同时 ν_2 成比例地增大), ε_{11}^c 在缓慢地减小。已知 ν_1 、 ν_2 都与 ε_{11}^c 正相关, 说明两个泊松比中, 受压的 x 方向的泊松比 ν_1 对 ε_{11}^c 的影响稍强于 ν_2 。

3) 令 a 、 b 、 r_ν 、 r_E 、 ν_1 为定值, 考察 r_μ 对 ε_{11}^c 的影响。总体来说, ε_{11}^c 随 r_μ 的增大而增大。

4) 令 a 、 r_ν 、 r_μ 、 r_E 、 ν_1 为定值, 考察 b 对 ε_{11}^c 的影响。 r_ν 和 r_μ 值固定时, ε_{11}^c 都随 b 的增大而增大, 且增长一直在变缓, 并最终趋近一个常数。当宽度比较大时, ε_{11}^c 几乎不受 b 的影响。

5) 令 b 、 r_ν 、 r_μ 、 r_E 、 ν_1 为定值, 考察 a 对 ε_{11}^c 的影响。 ε_{11}^c 随 a 的变化趋势呈现出一个振荡曲线。其波谷始终为定值, 振荡周期随 r_ν 的增大而微弱减小, 波峰随 a 的增大而逐渐减小, 且最终趋近波谷值。

6) 一般来说, 薄膜/基底系统的初始屈曲总是对应于多个波峰, 研究表明在 a 相同的条件下, 调整 b 的大小往往可以改变波峰的个数。

3 屈曲形貌分析

计算发现, 初始屈曲总是发生在对称模式下, 初始屈曲发生后, 表面屈曲形貌会沿着一阶屈曲模式演化, 屈曲形貌的幅值会随着外加应变的增大而增大。由式(6)、(7)可得:

$$C_1 (\alpha^2 - \nu_1 k^2) \cosh\left(\frac{\alpha b}{2}\right) = -C_3 (\beta^2 - \nu_1 k^2) \cosh\left(\frac{\beta b}{2}\right), \quad C_2 = C_4 = 0 \quad (10)$$

所以 Y_m 的表达式 (其中 $A > 0$) 为:

$$Y_m = A \left[-(\beta^2 - \nu_1 k^2) \cosh\left(\frac{\beta b}{2}\right) \cosh \alpha y + (\alpha^2 - \nu_1 k^2) \cosh\left(\frac{\alpha b}{2}\right) \cosh \beta y \right] \quad (11)$$

求出待定系数 A , 便可得到该薄膜/基底结构在给定外加应变 ε_{11}^0 下的屈曲形貌。系统的总势能 $U = U^p + U^s + U^b$, 其中 U^p 是薄膜压缩应变能 (即外加压力做功), U^s 是薄膜弯曲能, U^b 是基底变形能。设薄膜在平面状态下受到外加应变 ε_{11}^0 而屈曲, 显然有 $\varepsilon_{11}^0 \geq \varepsilon_{11}^c$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = 0$ 。已知基底对薄膜的切向作用力可以忽略^[15], 即 $\frac{\partial N_{11}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} = 0$, 因此 ε_{11} 与

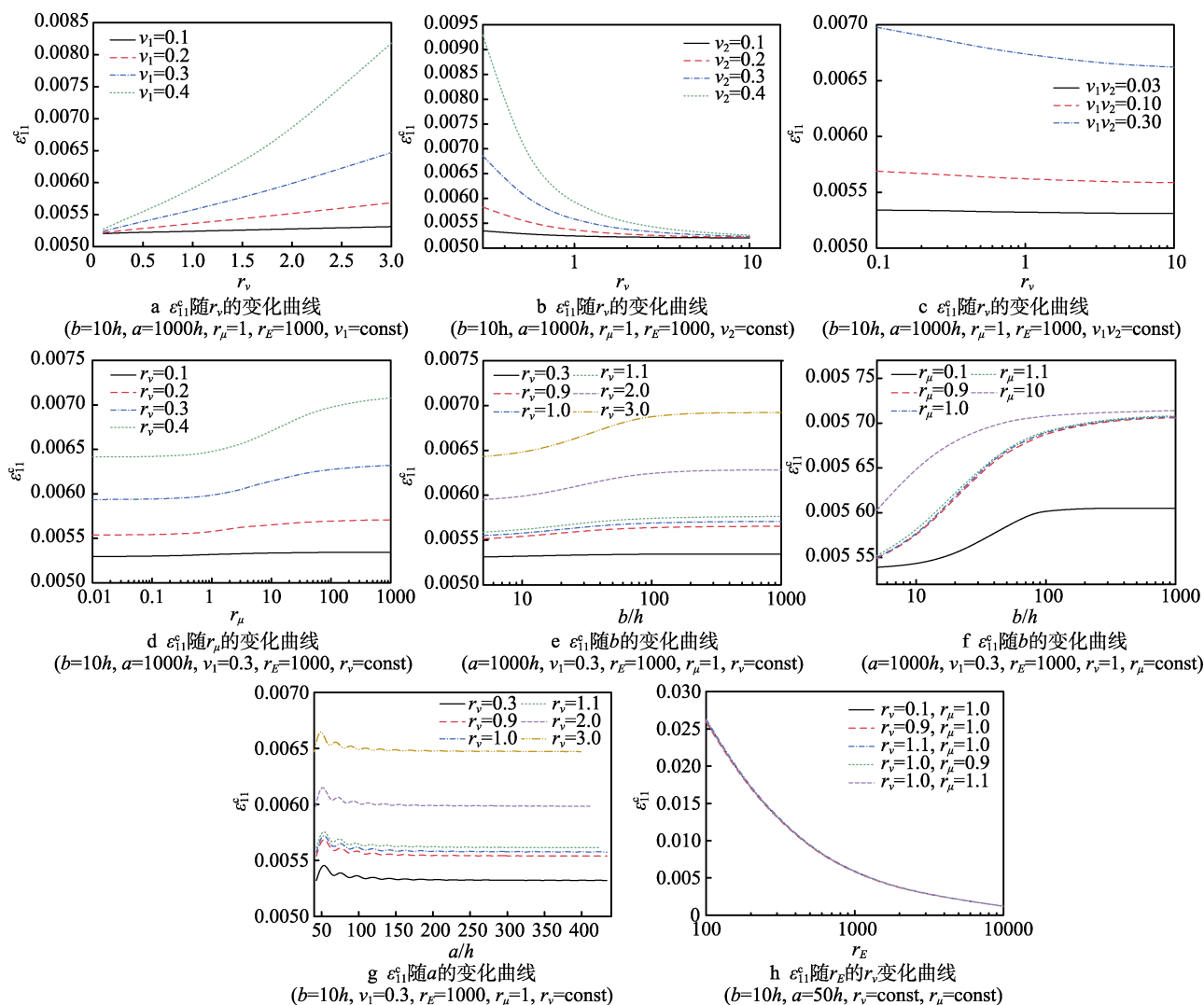


图2 不同条件下临界应变随参数的变化曲线

Fig.2 Curves of critical strain as functions of parameters under different conditions: a) curves of ε_{11}^c as functions of r_v ($b=10h$, $a=1000h$, $r_\mu=1$, $r_E=1000$, $v_1=\text{const}$); b) curves of ε_{11}^c as functions of r_v ($b=10h$, $a=1000h$, $r_\mu=1$, $r_E=1000$, $v_2=\text{const}$); c) curves of ε_{11}^c as functions of r_v ($b=10h$, $a=1000h$, $r_\mu=1$, $r_E=1000$, $v_1 v_2=\text{const}$); d) curves of ε_{11}^c as functions of r_μ ($b=10h$, $a=1000h$, $v_1=0.3$, $r_E=1000$, $r_v=\text{const}$); e) curves of ε_{11}^c as functions of b ($a=1000h$, $v_1=0.3$, $r_E=1000$, $r_\mu=1$, $r_v=\text{const}$); f) curves of ε_{11}^c as functions of b ($a=1000h$, $v_1=0.3$, $r_E=1000$, $r_v=1$, $r_\mu=\text{const}$); g) curves of ε_{11}^c as functions of a ($b=10h$, $v_1=0.3$, $r_E=1000$, $r_\mu=1$, $r_v=\text{const}$); h) curves of ε_{11}^c as functions of r_E ($b=10h$, $a=50h$, $r_v=\text{const}$, $r_\mu=\text{const}$)

x 无关。根据 von Kármán 板理论^[30], 薄膜总应变为:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} (i, j = 1, 2) \quad (12)$$

令 $i = j = 1$, 得 $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$, 再代入 w ,

有 $\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^0 - \frac{1}{2} Y_m^2 \cos^2 kx$, 上式两边同时在区间 $[0, x]$ 上积分, 可以得到 $u - u|_{x=0} = (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^0)x - \frac{1}{4} Y_m^2 k^2 x - \frac{1}{8} Y_m^2 k \sin 2kx$ 。考虑到 $x=0$ 是简支边边界条件 $u|_{x=0} = 0$, 又考虑到 $x=0$ 及 $x=a$ 处都是简支边边界

条件, 薄膜 x 方向的整体屈曲变形应与基底变形保持一致^[15], 需有 $\int_0^a u dx = 0$ 。因为 $\int_0^a \sin 2kx dx = 0$, 于是剩下部分 $(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^0)x - \frac{1}{4} Y_m^2 k^2 x = 0$, 从而最终得到

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0 + \frac{1}{4} Y_m^2 k^2, \quad u = -\frac{1}{8} Y_m^2 k \sin 2kx, \quad \text{屈曲后内力为}$$

$N_{11} = -E_1 h \varepsilon_{11} = -E_1 \varepsilon_{11} = -E_1 \varepsilon_{11}^0 - \frac{1}{4} E_1 Y_m^2 k^2$ 。因为薄膜受压缩情况下 $\varepsilon_{11}^0 < 0$, 而通常所说的 ε_{11}^0 是正值, 内力修正为 $N_{11} = -E_1 \varepsilon_{11}^0 + \frac{1}{4} E_1 Y_m^2 k^2$ 。

薄膜压缩应变能^[31-32]、基底变形能^[32]、薄膜弯曲

能^[33]的表达式分别为:

$$U^p = -\iint N_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy = \iint \left(-\frac{N_{11} \varepsilon_{11}}{2} \right) dx dy = \iint \frac{E_1}{2} \left(E_1 \varepsilon_{11}^0 - \frac{1}{4} E_1 Y_m^2 k^2 \right)^2 dx dy \quad (13)$$

$$U^s = -\iint \frac{1}{2} q w dx dy = \iint \frac{1}{4} \bar{E}_s k w^2 dx dy \quad (14)$$

$$U^b = \iint \frac{1}{2} \left[D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu_2 D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{\mu h^3}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (15)$$

算出 U 后, 可以将 U 数值积分成函数 $U(A)$, 根据最小势能原理^[28], 对 $U(A)$ 求最小值, 从而得到系数 A 。 A 并不能直观地体现屈曲形貌, 因此将薄膜宽度方向的中心和边缘幅值分别记为 $A_0 = Y_m(0)$ 和 $A_1 = Y_m\left(\frac{b}{2}\right)$, 用来衡量屈曲形貌, U 也可以表示为 $U(A_1)$ 或者 $U(A_0)$ 。 以 $b=10$ 、 $a=1000$ 、 $r_v=0.3$ 、

$r_\mu=1$ 、 $\nu_1=0.3$ 、 $r_E=1000$ 条件下的屈曲为例, 图 3 展示了不同 ε_{11}^0 下的 U 随 A_1 、 A_0 的曲线变化。

现在, 将式(11)代入式(5), 最终可得薄膜挠度表达式:

$$w = A \left[-(\beta^2 - \nu_1 k^2) \cosh\left(\frac{\beta b}{2}\right) \cosh \alpha y + (\alpha^2 - \nu_1 k^2) \cosh\left(\frac{\alpha b}{2}\right) \cosh \beta y \right] \sin kx \quad (16)$$

仍以 $b=10$ 、 $a=1000$ 、 $r_v=0.3$ 、 $r_\mu=1$ 、 $\nu_1=0.3$ 、 $r_E=1000$ 条件下的屈曲为例, 给定 ε_{11}^0 后, 通过章节 1 中的方法计算出 α 、 β 和 k , 由本节的方法可求出 A , 挠度 w 便可确定, 薄膜的屈曲形貌也就确定。 需要指出的是, 本节方法仅适用于外加应变 ε_{11}^0 大于初始屈曲应变 ε_{11}^c , 且小于倍周期临界应变的情况, 这时薄膜沿初始屈曲模式继续变形。 图 4 为用 Matlab 绘制的不同外加应变下的部分屈曲形貌 ($0 \leq x \leq 100$, $-5 \leq y \leq 5$), 以及 $\varepsilon_{11}^0 = 2\varepsilon_{11}^c$ 时的宽度视角幅值图。

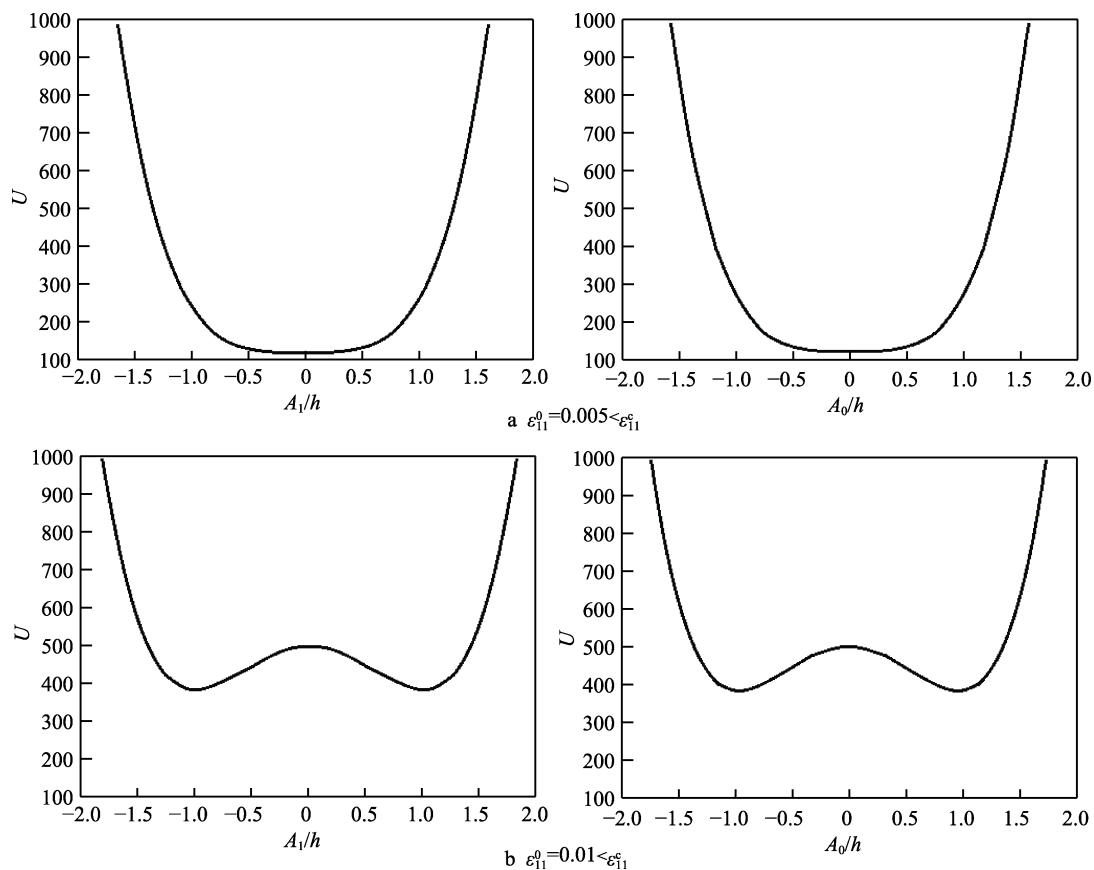


图 3 不同外加应变下总势能随幅值的变化曲线

Fig.3 Curves of total potential energy as a function of the amplitude under different applied strains

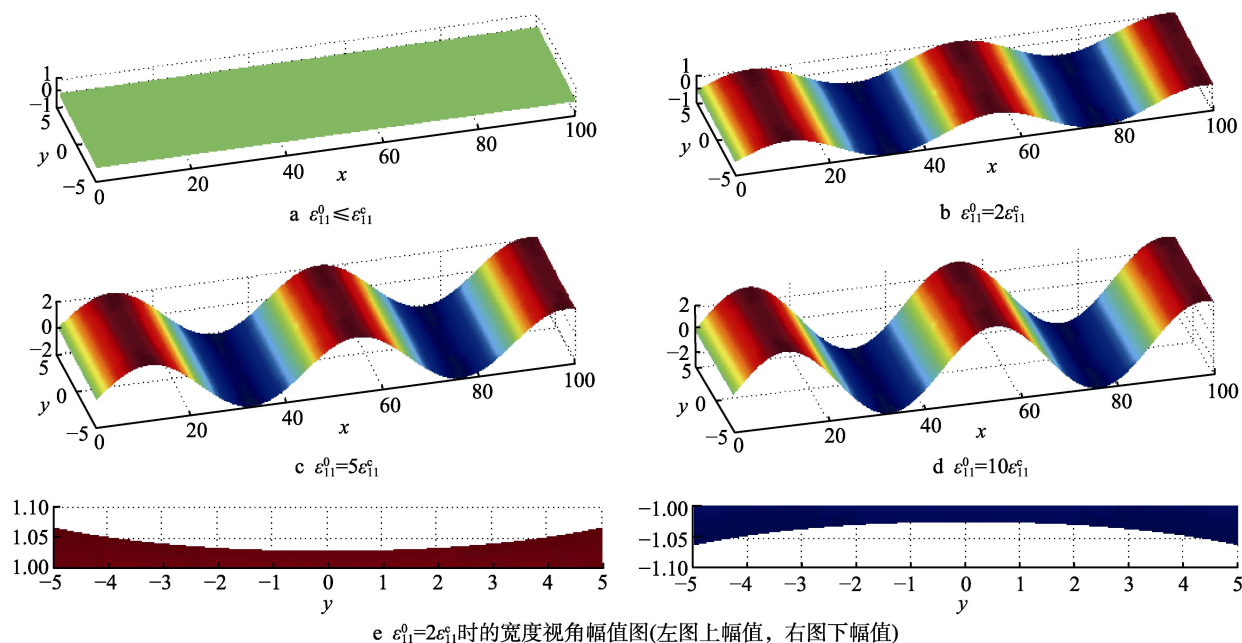


图4 不同外加应变下薄膜的屈曲形貌

Fig.4 Buckling morphology of the film under different applied strains: e) amplitude diagram of width angle when $\epsilon_{11}^0 = 2\epsilon_{11}^c$ (upper amplitude on the left and lower amplitude on the right)

4 参数对屈曲形貌的影响

从临界应变的结果得知, a 对屈曲的影响是呈振荡性质的, 仅取离散的 a 值进行对照, 难以看出其变化规律, 所以最后选定跟各向异性材料性质密切相关的参数 r_v 、 r_μ 、 b 来考察。图 5 绘制出了不同参数组合条件下, 以外加应变 ϵ_{11}^0 为变量的边缘幅值 A_1 与中心幅值 A_0 的变化曲线。

从图 5 中可以得到以下结论:

1) 幅值曲线的基本趋势一致, 在外加应变 ϵ_{11}^0 超过相应的临界应变 ϵ_{11}^c 之前, 幅值都为 0; ϵ_{11}^0 超过 ϵ_{11}^c 之后, 幅值都随着 ϵ_{11}^0 的增大而增大, 且增速一直在放缓。

2) 令 a 、 b 、 r_μ 、 r_E 、 ν_1 为定值, 考察 r_v 对 A_1 、 A_0 的影响。当 ϵ_{11}^0 超过 ϵ_{11}^c 时, 改变 r_v 大小, 对 A_1 、 A_0 的影响不大。

3) 令 a 、 b 、 r_v 、 r_E 、 ν_1 为定值, 考察 r_μ 对 A_1 、 A_0 的影响。结果显示随着 r_μ 增大, A_1 、 A_0 均呈现变小的趋向, 但影响程度有限。

4) 令 a 、 r_μ 、 r_v 、 r_E 、 ν_1 为定值, 考察 b 对 A_1 、 A_0 的影响。当 r_v 值较小时 (图中未画出), 幅值曲线都基本重合, 说明此时 b 对 A_1 、 A_0 影响很小。当 r_v 值较大时, A_1 和 A_0 的变化截然相反, A_1 随着 b 的增大而增大, A_0 却随之减小, 从而使得 A_1 和 A_0 的差距越来越大。尤其是在 r_v 值较大, 同时 r_μ 值较小的条件下, A_0 的减小幅度特别明显, A_1 和 A_0 的差距变得

极其显著。

5 数值验证

由于国内外对有限尺寸薄膜/基底结构的研究较少, 目前只搜索到 Jiang 等人做过相关的实验。他们发现长宽比较高的带状薄膜在沿长度方向受压形成的褶皱, 薄膜宽度增大, 其幅值随之增大^[24,34]。Jiang 等人理论分析采用的是各向同性材料薄膜, 但实验采用的是各向异性材料 (硅) 薄膜, 因此本文选取了部分算例进行对照, 固定薄膜长度, 控制薄膜宽度的变化, 且保证长宽比较高。变化曲线完全符合幅值随宽度增大而增大的趋势。褶皱幅值的对照结果良好。另外, 令其他所有参数为定值, 考察弹性模量比对临界应变的影响, 类似图 2h。当薄膜长度较大时, 若改变长度值, 对应的变化曲线几乎重合。说明此时薄膜长度对临界屈曲的影响非常小, 可以认为薄膜在长度方向上无限长, 其临界屈曲值刚好与弹性常数比的 2/3 次方成反比, 这与先前的诸多研究结论一致^[12]。

在缺乏实验验证的情况下, 本文考虑补充计算结果。利用商业软件 Abaqus 2016 CAE 增加了有限元仿真验证, 检验临界应变和表面屈曲表达式的正确性。通过对照各算例仿真结果的各项数据、图像, 发现基本都在可以接受的误差范围内, 这有力地支持了本文的理论推导以及分析结论。以 $b=10h$, $a=1000h$, $r_v=r_\mu=1$, $\nu_1=0.3$, $r_E=1000$ 条件下的屈曲为例, 取前八节屈曲模态, 计算出各阶特征值, 这里相当于各阶模态的外加应变值。

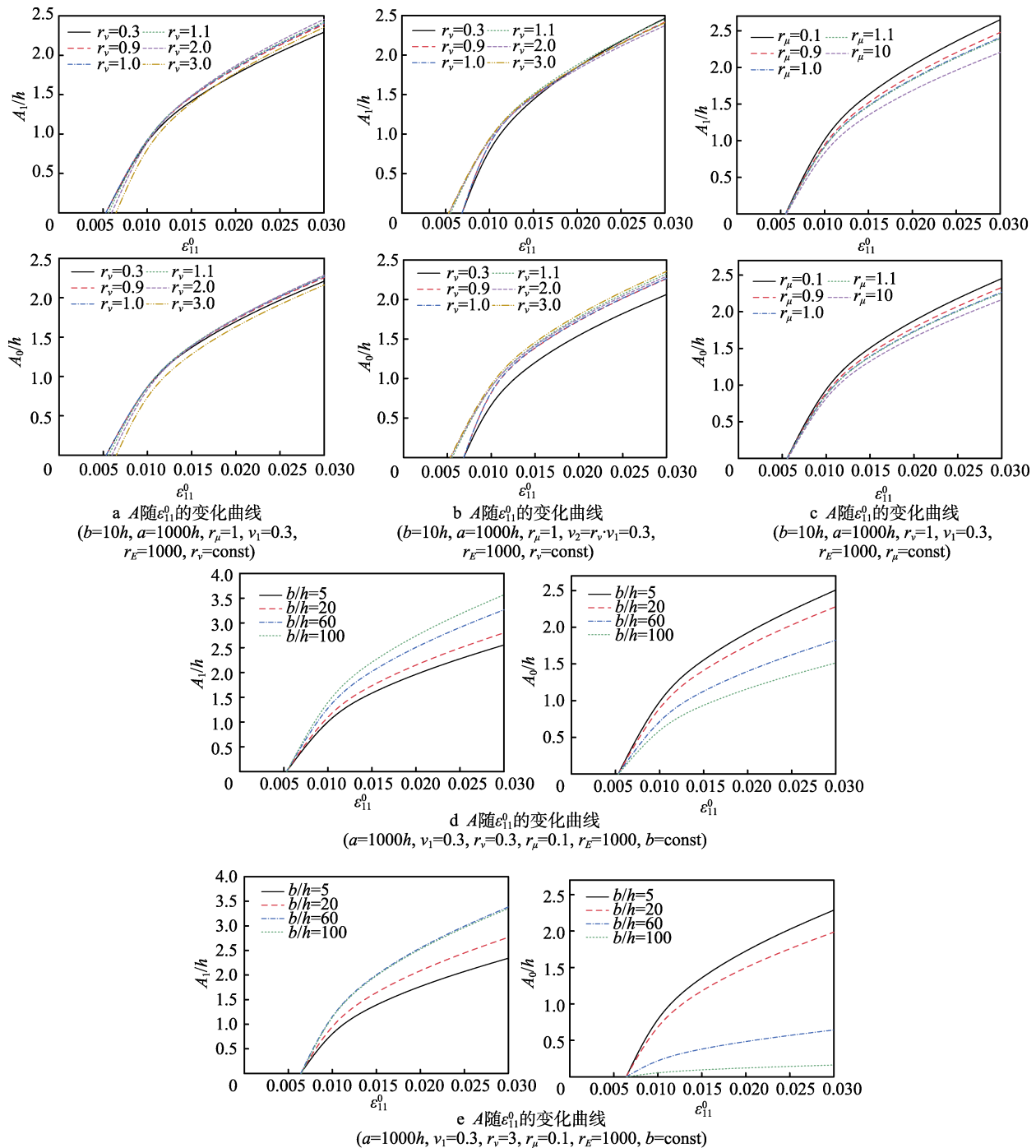


图 5 褶皱幅值随外加应变的变化曲线

Fig.5 Curves of fold amplitude with applied strain: a) curve of A versus ε_{11}^0 ($b=10h, a=1000h, r_\mu=1, \nu_1=0.3, r_E=1000, r_v=\text{const}$); b) curve of A versus ε_{11}^0 ($b=10h, a=1000h, r_\mu=1, \nu_2=r_v \nu_1=0.3, r_E=1000, r_v=\text{const}$); c) curve of A versus ε_{11}^0 ($b=10h, a=1000h, r_v=1, \nu_1=0.3, r_E=1000, r_\mu=\text{const}$); d) curve of A versus ε_{11}^0 ($a=1000h, \nu_1=0.3, r_v=0.3, r_\mu=0.1, r_E=1000, b=\text{const}$); e) curve of A versus ε_{11}^0 ($a=1000h, \nu_1=0.3, r_v=3, r_\mu=0.1, r_E=1000, b=\text{const}$)

其中,第一阶和第二阶模态都仅仅在薄膜两端有局部变形,未能发生真正的屈曲,而到第三阶模态就出现了包含较多波数的完整褶皱形貌,即第三阶模态才开始发生屈曲,因此将第三阶特征值 0.005 788 作为模拟初始屈曲的临界应变。对照理论推导的 $\varepsilon_{11}^c=0.005311$,两者高度吻合,说明在临界应变方面,

仿真结果很好地验证了理论推导。

第三阶模态的图像里,统计出完整的波峰个数是 23,跟理论上的半波个数 $m=46$ 完全吻合。图像还显示薄膜的最大变形量为 6.66×10^{-3} mm,即薄膜褶皱的最大挠度为 6.66×10^{-3} mm。根据挠度表达式,最大挠度出现在边缘幅值上,即 $\varepsilon_{11}^0=0.1$ 时, $A_1=4.4915$,

统一换算成 SI (mm) 单位制等于 4.49×10^{-3} mm, 在这种微小的尺度下其实是非常接近的。

图 6a、b 展示了长度视角和宽度视角观察的褶皱幅值图, 其中长度视角 (即 x 方向) 可以很清晰地看到连续的正弦波形状的褶皱, 与理论模型中关于薄膜初始屈曲是正弦波代表长度方向上的挠度变化的设定吻合。而宽度视角 (即 y 方向) 与图 4c 的理论结果对照发现, 幅值的变化趋势几乎如出一辙, 基本证实了 Y_m 表达式的正确性。从最大挠度和幅值变化趋势这两点上, 都说明在屈曲形貌方面, 仿真结果也很好地验证了理论推导。

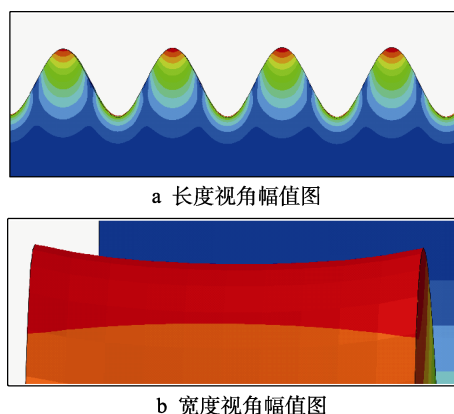


图 6 初始表面屈曲仿真结果

Fig.6 Simulation result of initial surface bulking: a) view amplitude diagram of length; b) view amplitude diagram of width

6 结论

本文根据 Kirchhoff-Love 薄板理论^[26]、von Kármán 板理论^[30]及最小势能原理^[28], 研究了正交各向异性材料硬质薄膜/柔软基底结构受单轴压缩的屈曲现象, 推导出了表面临界屈曲应变和表面屈曲表面形貌的表达式, 探究了跟各向异性性质密切相关的材料及几何参数对表面屈曲行为的影响。

在临界应变方面, 宽度与长度方向的模量比 r_v 对临界屈曲应变 ε_{11}^c 的影响较大, r_μ 则对临界屈曲应变 ε_{11}^c 的影响较小。 ε_{11}^c 随 y 方向宽度 (b) 的增大而增大, 但当 b 很大时, ε_{11}^c 随 b 的变化趋于平缓。 x 方向长度 (a) 较小时, ε_{11}^c 随 a 变化呈现出一个波谷为定值的振荡曲线: 当 a 逐渐增大, ε_{11}^c 最终趋近波谷值。所以一般当 a 较大时, 可以认为 a 对临界屈曲应变没有影响。薄膜为各向异性情况下, 薄膜与基底材料的模量比 r_E 仍然是影响临界屈曲应变的主要因素。

在屈曲形貌方面, ε_{11}^0 刚超过 ε_{11}^c , 且 ν_1 、 ν_2 固定时, r_v 变化对 A_1 、 A_0 的影响不大; ε_{11}^0 超过 ε_{11}^c 后, r_μ 越大, A_1 、 A_0 均越小; ε_{11}^0 超过 ε_{11}^c 后, 在 r_v 值较大且

r_μ 值较小的情况下, A_1 随 b 增大而增大, A_0 随 b 的增大而大幅度减小, 导致褶皱幅值在宽度方向差异显著。

针对各向异性性质, 在考察各个参数的过程中发现, 多次令 r_v 、 r_μ 的值各自逼近 1 (取 0.9 和 1.1), 临界应变和屈曲形貌的结果均趋近于各向同性材料的结果^[32]。说明本文的解析解可以退化到各向同性薄膜/基底系统表面屈曲的结果。

当 r_v 、 r_μ 的值远离 1, 即薄膜的各向异性性质特别强烈的时候, 薄膜/基底结构表现出一些显著的特点。以 r_v 远大于 1, 同时 r_μ 远小于 1 为例, 这时薄膜的 ε_{11}^c 一般会很小, 且 ε_{11}^c 随 b 的增大而明显增大; 在 ε_{11}^0 超过 ε_{11}^c 之后, A_1 随着 b 的增大而增大, 而 A_0 随着 b 的增大而急剧减小, 从而使得 A_1 和 A_0 的差距越来越大, 最终导致薄膜后屈曲的褶皱幅值在宽度方向上的差异非常巨大。这预示随着外加应变的逐渐增大, 宽度方向可能演变出其他的屈曲形貌。

参考文献:

- [1] CIARLETTA P, AMAR M B. Papillary networks in the dermal-epidermal junction of skin: A biomechanical model[J]. Mechanics research communications, 2012, 42: 68-76.
- [2] SAVIN T, KURPIOS N A, SHYER A E, et al. On the growth and form of the gut[J]. Nature, 2011, 476(7358): 57-62.
- [3] GENZER J, GROENEWOLD J. Soft matter with hard skin: From skin wrinkles to templating and material characterization[J]. Soft matter, 2006, 2: 310-323.
- [4] BOWDEN N, BRITAIN S, EVANS A G, et al. Spontaneous formation of ordered structures in thin films of metals supported on an elastomeric polymer[J]. Nature, 1998, 393(6681): 146-149.
- [5] STAFFORD C M, HARRISON C, BEERS K L, et al. A buckling-based metrology for measuring the elastic moduli of polymeric thin films[J]. Nature materials, 2004, 3(8): 545-550.
- [6] CHAN E P, SMITH E J, HAYWARD R C, et al. Surface wrinkles for smart adhesion[J]. Advanced materials, 2008, 20: 711-716.
- [7] BOWDEN N, PAUL K E, WHITESIDES G M, et al. The controlled formation of ordered, sinusoidal structures by plasma oxidation of an elastomeric polymer[J]. Applied physics letters, 1999, 75: 2557-2559.
- [8] MA T, LIANG H, CHEN G, et al. Micro-strain sensing using wrinkled stiff thin films on soft substrates as tunable optical grating[J]. Optics express, 2013, 21: 11994-12001.
- [9] SUN Y, CHOI W M, JIANG H, et al. Controlled buckling of semiconductor nanoribbons for stretchable electronics[J]. Nature nanotechnology, 2006, 1(3): 201-207.
- [10] ROGERS J A, SOMEYA T, HUANG Y. Materials and mechanics for stretchable electronics[J]. Science, 2010,

- 327(5973): 1603-1607.
- [11] KOO W H, JEONG S M, ARAOKA F, et al. Light extraction from organic light-emitting diodes enhanced by spontaneously formed buckles[J]. *Nature photonics*, 2010, 4: 222-226.
- [12] VOLYNSKII A L, BAZHENOV S, LEBEDEVA O V, et al. Mechanical buckling instability of thin coatings deposited on soft polymer substrates[J]. *Journal of materials science*, 2000, 35(3): 547-554.
- [13] CERDA E, MAHADEVAN L. Geometry and physics of wrinkling[J]. *Physical review letters*, 2003, 90(7): 074302.
- [14] AUDOLY B, BOUDAUD A. Buckling of a stiff film bound to a compliant substrate—Part I: Formulation, linear stability of cylindrical patterns, secondary bifurcations[J]. *Journal of the mechanics and physics of solids*, 2008, 56(7): 2401-2421.
- [15] CHEN X, HUTCHINSON J W. Herringbone buckling patterns of compressed thin films on compliant substrates[J]. *ASME journal of applied mechanics*, 2004, 71(5): 597-603.
- [16] CHOI W M, SONG J, KHANG D, et al. Biaxially stretchable “wavy” silicon nanomembranes[J]. *Nano letters*, 2007, 7(6): 1655-1663.
- [17] CAO Y, ZHENG X, JIA F, et al. Wrinkling and creasing of a compressed elastoplastic film resting on a soft substrate[J]. *Computational materials science*, 2012, 57: 111-117.
- [18] PETERSON R L, HOBART K D, KUB F J, et al. Reduced buckling in one dimension versus two dimensions of a compressively strained film on a compliant substrate[J]. *Applied physics letters*, 2006, 88: 201913.
- [19] HUANG X, LI B, HONG W, et al. Effects of tension-compression asymmetry on the surface wrinkling of film-substrate systems[J]. *Journal of the mechanics and physics of solids*, 2016, 94: 88-104.
- [20] ZHOU Z D, JIANG Q. Buckling analysis of stretchable ferroelectric thin film on elastomeric substrates[J]. *Acta mechanica solida sinica*, 2014, 27(5): 509-517.
- [21] YIN J, CHEN X. Buckling of anisotropic films on cylindrical substrates: Insights for self-assembly fabrication of 3D helical gears[J]. *Journal of physics D: Applied physics*, 2010, 43: 115402.
- [22] NI Y, SOH A K. On the growth of buckle-delamination pattern in compressed anisotropic thin films[J]. *Acta materialia*, 2014, 69: 37-46.
- [23] YIN S F, LI B, CAO Y P, et al. Surface wrinkling of anisotropic films bonded on a compliant substrate[J]. *International journal of solids and structures*, 2018, 141-142: 219-231.
- [24] JIANG H, KHANG D Y, FEI H, et al. Finite width effect of thin-films buckling on compliant substrate: Experimental and theoretical studies[J]. *Journal of the mechanics and physics of solids*, 2008, 56(8): 2585-2598.
- [25] 沈观林. 复合材料力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.
- SHEN G L. *Mechanics of composite materials*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996.
- [26] GORMAN D J. *Free vibration analysis of rectangular plates*[M]. New York: Elsevier, 1982.
- [27] BIOT M A. Bending of an infinite beam on an elastic foundation[J]. *Journal of applied mechanics*, 1937, 4: 1-7.
- [28] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- XU Z L. *Elasticity mechanics*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006.
- [29] 程银水, 朱锴. 正交各向异性矩形薄板弯曲、稳定、振动问题解析解的一般格式[J]. *北京建筑工程学院学报*, 1991(2): 89-102.
- CHENG Y S, ZHU Q. A general form of analytical solutions to bending, stability and vibration problems for orthotropic rectangular thin plates[J]. *Journal of Beijing University of Civil Engineering and Architecture*, 1991(2): 89-102.
- [30] ALLEN H G. *Analysis and design of structural sandwich panels*[M]. New York: Pergamon, 1969.
- [31] HUO X P, QIAO P Z. Explicit local buckling analysis of rotationally and vertically restrained orthotropic plates under uniaxial compression[J]. *International journal of structural stability and dynamics*, 2012, 12(5): 38-59.
- [32] 黄杰雄, 国凤林. 有限尺寸硬薄膜/软基底的屈曲分析[J]. *力学季刊*, 2017, 38(2): 251-260.
- HUANG J X, GUO F L. Buckling analysis of finite stiff film/soft substrate system[J]. *Chinese quarterly of mechanics*, 2017, 38(2): 251-260.
- [33] YAJUVINDRA K. Rayleigh-Ritz method in the study of transverse vibration of nonhomogeneous orthotropic rectangular plates of uniform thickness resting on Winkler foundation[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2009: 63-67.
- [34] JIANG H, KHANG D, SONG J, et al. Finite deformation mechanics in buckled thin films on compliant supports[J]. *Proceedings of the national academy of sciences*, 2007, 104(40): 15607-15612.