

分布位错法研究移动赫兹压力作用下 次表面裂纹的力学行为

王强胜, 李孝滔, 咎晓东, 江晓禹

(西南交通大学 力学与工程学院, 成都 610031)

摘要: **目的** 用理论方法来求解复杂工况下的次表面裂纹问题, 并分析裂纹尖端的力学行为。**方法** 利用叠加原理将主问题分成两个子问题, 基于弹性力学集中力的 Flamant 解求解子问题一, 基于分布位错技术求解子问题二。进一步建立关于位错密度的积分方程, 利用 Gauss-Chebyshev 数值求积法求解此奇异积分方程, 得到相关的力学参量。**结果** 得到了裂纹尖端的应力强度因子和靠近上表面裂纹尖端附近产生局部粘着的临界摩擦系数, 并分析了裂纹长度、裂纹埋入深度对裂尖应力强度因子及临界摩擦系数的影响。在裂纹埋入深度一定时, 两个裂尖的应力强度因子都随裂纹变长而先增加后减小。靠近表面的裂尖更容易发生粘着, 裂纹长度越短, 裂纹埋入深度越小, 越容易粘着。临界摩擦系数随着裂纹长度的增加而缓慢增加, 随裂纹埋入深度的增加, 近似呈线性增加。**结论** 在赫兹压力作用下, 当裂纹长度较短时, 裂纹更容易往内部扩展; 而当裂纹较长时, 裂纹更容易往表面扩展。

关键词: 次表面裂纹; 分布位错; 赫兹压力; 位错密度; 应力强度因子; 粘着

中图分类号: U211.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3660(2019)06-0252-09

DOI: 10.16490/j.cnki.issn.1001-3660.2019.06.030

Mechanical Behaviors of Subsurface Crack under Moving Hertz Pressure by Distributed Dislocation Method

WANG Qiang-sheng, LI Xiao-tao, ZAN Xiao-dong, JIANG Xiao-yu

(School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

ABSTRACT: The work aims to solve the subsurface crack by theoretical solution and analyze the mechanical behaviors of crack tips. The problem was divided into two sub-problems based on the superposition principle. The first sub-problem was solved by Flamant's solution of the concentrated force in the elastic mechanics and the second sub-problem was solved by the distributed dislocation technique. Further, the singular integral equations about dislocation density were established. The numerical solution of the equations was presented by Gauss-Chebyshev quadrature method and the relevant mechanical parameters were obtained. The stress intensity factor at crack tips (SIF) and the critical friction coefficient (CFC) for the upper surface crack tip adhesion were obtained, and the effects of crack length and crack embedding depth were investigated. From the results, SIF

收稿日期: 2019-01-07; 修订日期: 2019-02-27

Received: 2019-01-07; Revised: 2019-02-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11472230)

Fund: Supported by the National Natural Science Foundation of China (11472230)

作者简介: 王强胜 (1992—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为疲劳与断裂。

Biography: WANG Qiang-sheng (1992—), Male, Master, Research focus: fatigue and fracture.

通讯作者: 江晓禹 (1965—), 男, 博士, 教授, 研究方向为复合材料力学和接触疲劳。邮箱: xiaoyujiang8@sina.com

Corresponding author: JIANG Xiao-yu (1965—), Male, Doctor, Professor, Research focus: mechanics of composite materials and contact fatigue. E-mail: xiaoyujiang8@sina.com

first increased and then decreased with the crack length increasing when the depth of the crack was constant. The crack tip close to the surface was easier to adhere. The smaller the crack length and depth are, the more likely the crack plane is to adhere. CFC increased slowly as the crack length increased. There was an approximate positive relationship between CFC and the crack depth. Under the Hertz pressure, the crack propagates to the material interior when the crack length is relatively small, while the crack propagates toward the surface when the crack length is relatively large.

KEY WORDS: subsurface crack; distribution dislocation; Hertz pressure; dislocation density; stress intensity factor; adhesive

大多数情况下, 材料的失效是由疲劳或断裂造成的。因此, 裂纹问题和断裂力学等是很重要的研究领域, 自 20 世纪以来得到国内外众多学者的广泛研究^[1]。微裂纹在材料表面萌生后将不断扩展, 扩展到一定程度时, 会导致材料剥离, 甚至断裂^[2]。压缩载荷作用下裂纹的局部或完全闭合现象, 在自然界中是非常常见的。例如, 岩体中闭合裂纹在剪力和摩擦阻力作用下发生裂纹面滑移^[3]; 工业管道由于长期承受高温、高压及高交变载荷而极易产生闭合裂纹^[4]; 由于围压及温度作用, 地质走滑断层扩展, 结晶固体(如冰、岩石、硅酸盐矿物)等因压应力而导致的闭合裂纹失效^[5-7]。轮轨滚动接触疲劳、微动磨损等过程中, 材料内部受压缩载荷都会产生闭合裂纹^[8]。因而对材料在压缩载荷作用下裂纹面闭合效应的研究显得尤为重要。

裂纹面接触问题的疲劳断裂研究是有一定困难的^[9], 主要有两个方面的原因: 一是裂纹在受压缩载荷作用下扩展的数据资料较少; 二是摩擦应力可能通过接触的裂纹面来传递。对于理想化的裂纹问题, 国内外众多专家学者做了大量的研究工作。文献[8]详细描述了分布位错法, 它已成为研究各种裂纹问题的有效方法。分布位错法的基本思想是用连续分布位错代替裂纹和边界, 基于该方法, J. N. Dewynne、D. A. Hill 和 D. Nowell^[10]研究了半平面内受均布拉伸载荷作用下垂直于表面的穿透裂纹问题, 对斜裂纹的张开位移进行了计算与分析, 但对于次表面的直裂纹在压缩载荷作用下, 裂纹面的滑移、裂尖粘着等问题没有考虑。J. Dundurs、D. Schmueser 和 M. Comninou^[11-14]分析了半无限大平面内由拉剪载荷引起的裂纹面分离与滑移问题, 但是对于复杂载荷作用下闭合裂纹尖端的力学行为没有详细的理论解答。咎晓东、曹世豪、江晓禹等人^[15-17]将钢轨简化为半无限大平面, 利用有限元模拟了循环轮轨接触载荷作用下, 半无限大平面内表面裂纹的力学行为。J. K. Kim 和 C. S. Kim^[18]用实验的方法, 研究了简化钢轨模型中平行于自由表面的闭合裂纹的力学响应。H. Salehizadeh 和 N. Saka^[19]利用有限元, 计算了半无限大平面内赫兹压力作用下, 平行于自由面的次表面闭合直裂纹和偏折裂纹问题, 分析了裂纹尖端表面摩擦和塑性变形对裂纹尖端的影响。尽管国内外研究者对半无限大平面内的各种裂纹问题做了大量的研究工作, 但是对于复杂工况下垂直

于自由面的次表面直裂纹, 其裂纹尖端的力学行为与裂纹面摩擦系数的相互影响, 以及靠近上表面的裂纹尖端出现粘着的临界状态等问题的相关研究内容较少。基于此, 又考虑到钢轨受车轮循环载荷下, 其存在有次表面裂纹的这一实际工程背景, 文中的研究目标模型类似于钢轨受车轮循环载荷作用下的次表面裂纹模型, 将移动赫兹压力施加在半无限大平面边界, 通过理论方法求解闭合裂纹问题。

赫兹压力作用下求解裂纹面上的应力是比较困难的, 没有办法通过直接积分的方法得到, 文中采用了泰勒展开成幂级数的数学手段解决了该问题。首先建立了如图 1 所示含次表面裂纹的半无限大弹性平面简化模型, 裂纹垂直于自由面; 然后基于分布位错技术和 Gauss-Chebyshev 数值求积法, 研究了移动赫兹压力作用下, 次表面裂纹裂尖应力强度因子的数值解; 最后分析了裂纹长度、裂纹埋入深度对裂尖应力强度因子的影响, 以及得到不同条件下靠近上表面的裂纹尖端附近出现粘着的临界摩擦系数。通过对移动赫兹压力作用下, 半无限大弹性平面内次表面裂纹问题的理论求解, 一方面有助于将该理论方法的求解思路及过程推广到求解更加复杂的非均匀载荷作用下的裂纹问题(如考虑真实轮轨载荷工况下的钢轨次表面裂纹问题); 另一方面, 可以深入掌握半无限大平面内垂直于自由面的直裂纹在移动赫兹压力作用下的力学机理, 进而对该工况下的材料失效具有一定的参考价值。

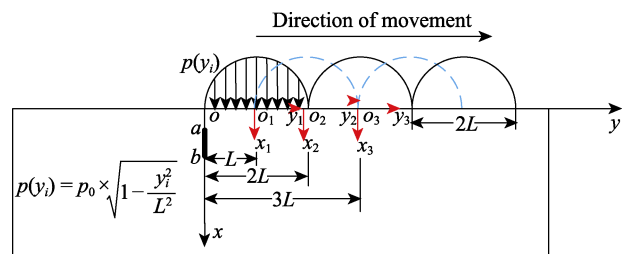


图 1 赫兹压力作用下的次表面裂纹模型
Fig.1 Subsurface crack model under Hertz pressure

1 理论模型

类似于钢轨受车轮循环载荷, 文中用理论方法研究了复杂工况下的次表面裂纹问题, 并分析了裂纹尖

端的力学行为。即将具体问题转化成移动赫兹压力作用下,研究半无限大平面内垂直于自由面的一条次表面裂纹问题。考虑模型的对称性,只计算赫兹压力在裂纹右侧移动的过程,如图1所示,赫兹压力接触半长为 L ,裂纹上端距上表面距离为 a ,裂纹下端距上表面为 b 。为便于后文方程(4)、(5)积分,以接触斑中心 O_i ($i=1, 2, 3\cdots$)为坐标原点,建立局部坐标系,距全局坐标系原点 O 的距离为 $y=iL$ ($i=1, 2, 3\cdots$),赫兹压力以接触半长 L 的间隔进行移动。假定弹性平面的上表面只受赫兹压力的影响,暂且不考虑接触摩擦力。滑动面垂直于自由表面,借助 J. Dundurs 和 Sendekyj^[20]、J. Dundurs 和 M. Comninou^[21]文章中提到的方法,可以找出滑移面上产生的应力。

由于外载荷在裂纹面上产生的法向力 $N(x)<0$,即裂纹面总是受到压缩载荷而封闭,因此滑移区可以仅用连续分布的滑动位错来模拟^[22-25]。

2 理论求解

2.1 叠加原理

图1展示的是移动赫兹压力作用下半无限弹性平面内的次表面裂纹问题。从 Bueckner 定理出发,将主问题分解成两个子问题。其中子问题一:无裂纹时外载荷在平面内产生的应力问题。子问题二:赫兹压力卸载后平面内沿裂纹线上施加大小相等且方向相反的应力问题^[8]。基于弹性力学集中力的 Flamant 解^[26]及文献[19-20]求解子问题一,基于分布位错技术求解子问题二。最后将这两个子问题通过叠加原理得到完整解。

通过对两个问题解的简单叠加,得到该问题应力的合成状态:

$$\sigma_{ij}(x, y) = \tilde{\sigma}_{ij}(x, y) + \bar{\sigma}_{ij}(x, y) \quad (1)$$

式中: $\tilde{\sigma}_{ij}(x, y)$ 为无裂纹时平面内任一点由外载荷产生的应力状态(子问题一); $\bar{\sigma}_{ij}(x, y)$ 为外载荷卸除后在裂纹面任一点处施加的应力(子问题二)。

裂纹问题的边界条件为:

$$\begin{cases} N(x) = \tilde{\sigma}_{yy} + \bar{\sigma}_{yy} \\ S(x) = \tilde{\tau}_{xy} + \bar{\tau}_{xy} \\ S(x) = -fN(x) \quad a < x < b \end{cases} \quad (2)$$

其中 $N(x)$ 和 $S(x)$ 分别表示沿裂纹线上作用的总的法向力和切向力。

2.2 赫兹压力泰勒展开

借助弹性力学中集中力的 Flamant 解^[26],将赫兹压力泰勒展开^[27]后直接积分,得出平面内裂纹线($y=0$)上的应力表达式。

$$dF = p_0 \times \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{L^2}} d\xi \quad (3)$$

$$\tilde{\sigma}_{y_i y_i} = -\frac{2}{\pi} \times \int_{-L}^L p_0 \times \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{L^2}} \times \frac{x(y_i - \xi)^2}{[x^2 + (y_i - \xi)^2]^2} d\xi \quad (4)$$

$$i = 1, 2, 3 \cdots$$

$$\tilde{\tau}_{xy_i} = -\frac{2}{\pi} \times \int_{-L}^L p_0 \times \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{L^2}} \times \frac{x^2(y_i - \xi)}{[x^2 + (y_i - \xi)^2]^2} d\xi \quad (5)$$

$$i = 1, 2, 3 \cdots$$

由于式(4)、(5)无法直接进行积分计算,所以将赫兹压力做泰勒展开处理,得到:

$$\frac{p(\xi)}{p_0} = \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{L^2}} \approx f(\xi) = 1 - \frac{1}{2!} \frac{\xi^2}{L^2} - \frac{3}{4!} \frac{\xi^4}{L^4} - \frac{45}{6!} \frac{\xi^6}{L^6} - \cdots \quad (6)$$

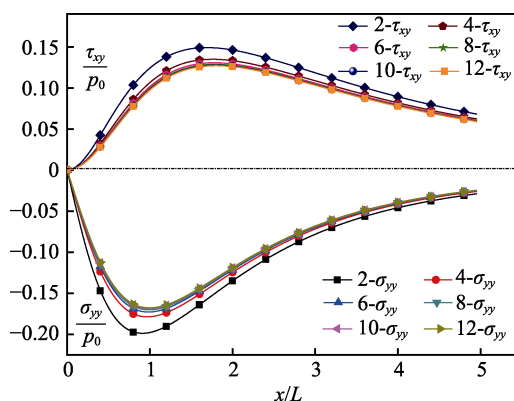
将式(6)代入到式(4)、(5)中,得到外载荷作用下平面内一点的应力为:

$$\tilde{\sigma}_{y_i y_i} = -\frac{2p_0}{\pi} \times \int_{-L}^L f(\xi) \times \frac{x(y_i - \xi)^2}{[x^2 + (y_i - \xi)^2]^2} d\xi \quad (7)$$

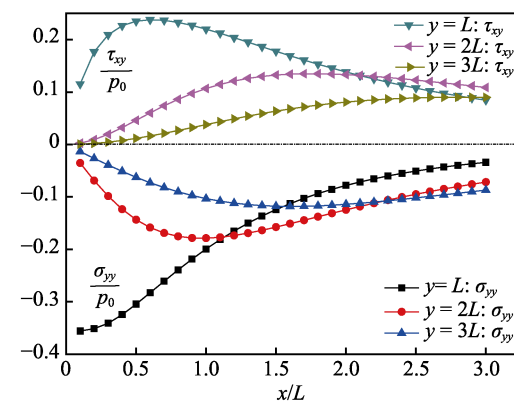
$$\tilde{\tau}_{xy_i} = -\frac{2p_0}{\pi} \times \int_{-L}^L f(\xi) \times \frac{x^2(y_i - \xi)}{[x^2 + (y_i - \xi)^2]^2} d\xi \quad (8)$$

用 $y_1 = -L$ 、 $y_2 = -2L$ 、 $y_3 = -3L$ 代替式(7)、(8)中的 y_i ,得到裂纹线 $y=0$ 处的无量纲化应力 $\tilde{\tau}_{xy}$ 、 $\tilde{\sigma}_{yy}$ 。

图2为外载荷在裂纹线($y=0$)上产生的应力随



a 泰勒展开成不同阶次时裂纹线上的应力对比



b 赫兹压力处于不同位置时裂纹线上的应力对比

图2 裂纹线上的应力变化曲线

Fig.2 Stress curve on the crack line: a) Stress comparison of crack line when Taylor expands into different orders; b) Stress comparison of crack line when Hertz stress is in different positions

距上表面无量纲化距离 x/L 的变化情况, 图 2a 为赫兹压力泰勒展开成幂级数后, 取不同阶次时的应力对比。其中 $2-\tau_{xy}$ 表示式 (6) 只保留二次多项式时的剪切应力; $2-\sigma_{yy}$ 表示式 (6) 只保留二次多项式时的压应力。可以发现, 幂级数在六次多项式以后, 应力值的变化非常小, 为了减小计算量, 又不失降低精度的前提下, 将式 (6) 展开成六次多项式进行数值计算。图 2b 为赫兹压力移动过程中在裂纹线处产生的应力变化曲线, 其中 $y=L$: τ_{xy} 表示赫兹压力中心距裂纹线的距离为 L 时, 在裂纹线上产生的剪切应力; $y=L$: σ_{yy} 表示赫兹压力中心距裂纹线的距离为 L 处时, 在裂纹线上产生的压应力。

2.3 关于位错密度的积分方程的建立

位于 $(\xi, 0)$ 处的一个位错具有 Burgers 矢量, 其分量为 b_x 、 b_y , 该位错在任一点处产生的应力为:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{xx} = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \{b_x(\xi)G_{xxx}(x, y; \xi) + b_y(\xi)G_{jxx}(x, y; \xi)\} \\ \bar{\sigma}_{yy} = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \{b_x(\xi)G_{yyy}(x, y; \xi) + b_y(\xi)G_{jyy}(x, y; \xi)\} \\ \bar{\tau}_{xy} = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \{b_x(\xi)G_{xxy}(x, y; \xi) + b_y(\xi)G_{jxy}(x, y; \xi)\} \end{cases} \quad (9)$$

从图 2b 可见, $\sigma_{yy}/p_0 < 0$, 所以图 1 中裂纹面总是受到压缩载荷而闭合, 故裂纹可以等效成滑移位错, 即 $b_y=0$ 。因此裂纹线 ($y=0$) 上是由单位位错产生的应力, 方程 (9) 简化为:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{yy} = 0 \\ \bar{\tau}_{xy} = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} b_x(\xi) G_{xxy}(x, y; \xi) \end{cases} \quad (10)$$

其中影响函数 $G_{xxy}(x; \xi) = \frac{1}{x-\xi} - \frac{1}{x+\xi} - \frac{2\xi}{(x+\xi)^2} + \frac{4\xi^2}{(x+\xi)^3}$, μ 是剪切模量, κ 是 Kolosov 常数, 平面应变时 $\kappa = 3-4\nu$, 平面应力时 $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ 。

由方程 (10) 中 $\bar{\sigma}_{yy} = 0$ 可知, 裂纹面的法向力 $N(x)$ 不受位错分布的影响, 保持方程 (7) 给出的值不变, 即:

$$N(x) = \bar{\sigma}_{yy} \quad (11)$$

整个裂纹面的切向力 $S(x)$ 由两部分组成:

$$S(x) = \bar{\tau}_{xy} + \bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{xy} + \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_a^b B_x(\xi) G(x; \xi) d\xi \quad (12)$$

式中: $B_x(\xi)$ 为滑移方向的位错密度函数。

考虑裂纹面摩擦的影响时, 由于外载荷在裂纹面上产生的切应力 $\bar{\tau}_{xy} > 0$, $\bar{\sigma}_{yy} < 0$, 故假设裂纹面将沿 x 轴正向滑移, 此时裂纹面的库伦摩擦力为:

$$S(x) = -fN(x) \quad a < x < b \quad (13)$$

其中 f 为摩擦系数。将方程 (7)、(8)、(12) 代

入方程 (13) 中, 得到关于位错密度的积分方程为:

$$\frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_a^b B_x(\xi) G(x; \xi) d\xi + \bar{\tau}_{xy} + f\bar{\sigma}_{yy} = 0 \quad (14)$$

2.4 积分方程的数值求解

方程 (14) 的解析解是很难得到的, 因此用数值方法求解该方程。其中 Gauss-Chebyshev 求积是一种有效的数值方法^[28-29], 积分区间 (a, b) 通过式 (15) 代换来得到归一化区间 $(-1, 1)$ 。

$$\begin{cases} s = \frac{2\xi - (b+a)}{b-a} \\ t = \frac{2x - (b+a)}{b-a} \\ \delta = \frac{b-a}{4L} \\ \frac{\xi}{2L} = \delta s + \frac{(b+a)}{4L} \end{cases} \quad (15)$$

积分区间归一化后, 关于位错密度的积分方程 (14) 变为:

$$-\frac{1}{2L\delta} \{ \bar{\tau}_{xy}(t) + f\bar{\sigma}_{yy}(t) \} = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{-1}^{+1} G'(t; s) B_x(s) ds \quad |t| < 1 \quad (16)$$

$$G'(t; s) = \frac{2}{(b-a)(t-s)} - \frac{2}{b(t+s+2) - a(t+s-2)} - \frac{4b(s+1) - 4a(s-1)}{\{b(t+s+2) - a(t+s-2)\}^2} + \frac{8\{b(s+1) - a(s-1)\}^2}{\{b(t+s+2) - a(t+s-2)\}^3} \quad (17)$$

由于应力在裂纹的每一端都是奇异的, 位错密度也是如此, 因此要求位错密度 $B_x(s)$ 在两端以平方根奇异的方式表现。将未知位错密度作为基本函数 $w(s)$ 和未知函数 $\phi_x(s)$ 的乘积, 从文献[8]中得到位错密度函数:

$$B_x(s) = \frac{\phi_x(s)}{\sqrt{1-s^2}} \quad (18)$$

要使问题得以解决, 还需要一个补充方程, 因为要求裂纹的一端不存在相对于另一端的净相对切向位移, 即从裂纹面一端到另一端不应出现净位错^[8], 得到补充方程(19)。

$$\int_{-1}^{+1} B_x(s) ds = 0 \quad (19)$$

采用 Gauss-Chebyshev 数值积分方法, 方程 (16) 离散后可以近似地用 $N-1$ 个代数方程代替。

$$-\frac{\kappa+1}{2\mu} \frac{1}{2L\delta} \{ \bar{\tau}_{xy}(t_k) + f\bar{\sigma}_{yy}(t_k) \} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi_x(s_i) G'(t_k, s_i) \quad k=1, \dots, N-1 \quad (20)$$

方程 (19) 离散为:

$$\frac{\pi}{N} \sum_{i=1}^N \phi_x(s_i) = 0 \quad (21)$$

方程 (20)、(21) 中, 设置的 N 个离散积分点 s_i 和 $N-1$ 个配置点 t_k , 可以从文献[8]的表 2.2 中得到:

$$\begin{cases} s_i = \cos\left(\pi \frac{2i-1}{2N}\right) & i=1, \dots, N \\ t_k = \cos\left(\pi \frac{k}{N}\right) & k=1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (22)$$

方程 (20) 和 (21) 中共有 N 个多项式方程组, 含有 N 个未知数 $\phi_x(s_i)$ 。通过 Mathematic 编写 $N \times N$ 的矩阵方程组, 计算出未知函数的 N 个数值解。为保证计算精度, 文中计算 N 取 30。

由方程 (20)、(21) 求解得到 $\phi_x(s_i)$ 之后, 通过方程 (18) 得到位错密度函数:

$$B_x(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} M_I \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} \Phi_j(s) \right] \phi(s_i) \quad (23)$$

其中 M_I 和 Φ_j 可以从文献[8]的表 2.4 中得到:

$$\begin{cases} M_I = \frac{2}{N} \\ \Phi_j(s) = \cos\left[\frac{2i-1}{2N} j\pi\right] \cos[j \times \arccos(s)] \end{cases} \quad (24)$$

得到位错密度函数之后, 通过方程 (25) 可计算裂纹面之间的相对滑开位移。

$$h(x) = -\int_{-1}^x B_x(s) ds \quad (25)$$

对任意的 x , 都有 $h(x) > 0$, 因此计算时必须保证滑移方向和切向力 $S(x)$ 方向保持一致。

利用 Krenk 插值公式^[30]求出每个裂纹尖端的无量纲化应力强度因子:

$$\begin{cases} \frac{K_{II}(a)}{p_0 \sqrt{2\pi\delta L}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\sin\left[\pi \frac{2(N+1-i)-1}{4N} (2N-1)\right]}{\sin\left[\pi \frac{2(N+1-i)-1}{4N}\right]} \phi_x(s_{N+1-i}) \\ \frac{K_{II}(b)}{p_0 \sqrt{2\pi\delta L}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\sin\left[\pi \frac{2i-1}{4N} (2N-1)\right]}{\sin\left[\pi \frac{2i-1}{4N}\right]} \phi_x(s_i) \end{cases} \quad (26)$$

3 结果验证

为保证图 1 中理论模型计算的正确性, 将模型中赫兹压力简化成均布载荷, 如图 3 所示。文献[9]已经研究了该问题, 采用文中方法所得结果与文献[9]的对比如图 4 所示。其中图 4a 给出的是裂纹长度对 K_{II} 的影响, 可以看到, 文中的分布位错法计算结果、有限元模拟结果与文献[9]的结果基本吻合, 只是在摩擦系数 $f=0.8$, 裂纹无量纲化的长度在 0~0.75 区间上时, 三种计算结果稍有偏差。裂纹长度较短时, 有限元模拟结果与其他两种计算结果误差偏大。主要原因是裂纹较短时, 其裂纹尖端的单元网格存在有较大的奇异

性。图 4b 给出的是裂纹埋入深度对 K_{II} 的影响, 三种结果偏差比较小, 文中的分布位错法计算结果与文献[9]的结果基本吻合。总的来说, 不管是变化趋势, 还是数值大小, 文中的计算结果、有限元模拟结果和文献中的结果都是比较吻合的, 因此本文采用的计算方法得到的结果是可靠的。

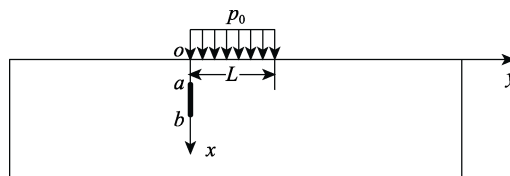
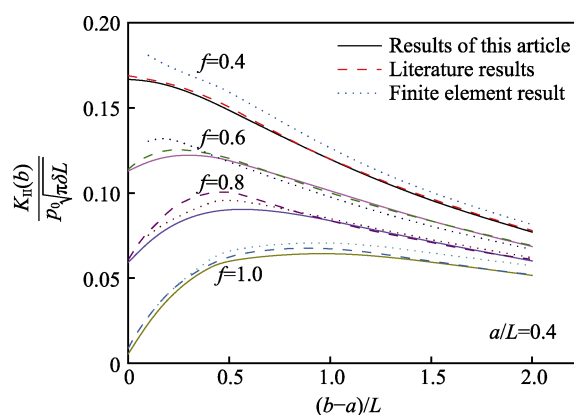
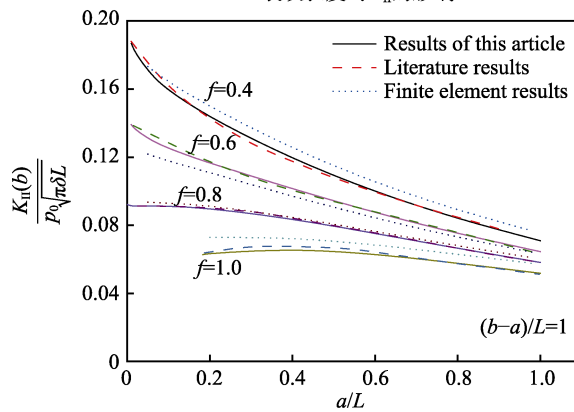


图 3 简化模型
Fig.3 Simplified model



a 裂纹长度对 K_{II} 的影响



b 裂纹埋入深度对 K_{II} 的影响

图 4 文中结果与文献结果的对比

Fig.4 Comparison of the results of this paper with the results of the literature: a) Influence of crack length on K_{II} ; b) Influence of buried depth on crack of K_{II}

4 数值结果与分析

4.1 裂纹长度对 K_{II} 的影响

取裂纹埋入深度为定值 ($a/L=0.5$), 计算了赫兹压力移动过程中应力强度因子 K_{II} 的变化曲线, 如图 5 所示。从图 5 中可以看到:

1) 当裂纹埋入深度一定, 赫兹压力位于同一位置时, 外载荷在裂纹 a 端附近产生的应力值保持一

定, 即对 K_{II} 的影响一定, 故该工况下 K_{II} 只受裂纹长度的影响。在裂纹较短时, 裂纹 a 端附近 K_{II} 随着裂纹长度的增加而增加, 说明随裂纹长度的增加, 裂纹 a 端附近的应力集中程度越强, 此时裂纹更容易扩展。当裂纹长度增加到一定值时, a 端 K_{II} 随着裂纹长度的增加而缓慢减小, 说明随裂纹长度的增加, 裂纹 a 端附近的应力集中程度变弱, 此时裂纹不容易发生扩展。

2) 随裂纹长度的变化, 裂纹 b 端附近将受到外载荷的影响, 即 K_{II} 受到裂纹长度和外载荷的共同影响。在裂纹较短时, 裂纹 b 端附近 K_{II} 随着裂纹长度的增加而快速增加, 说明随裂纹长度的增加, 裂纹 b 端附近的应力集中程度越强, 此时裂纹更容易扩展。当裂纹长度增加到一定值时, b 端 K_{II} 随着裂纹长度的增加而较 a 端快速减小, 说明裂纹 b 端附近受外载荷和裂纹长度的影响更大, 此时裂纹 b 端附近随裂纹长度的增加应力集中程度更快地变弱, 裂纹越不容易发生扩展。

3) 从裂纹尖端应力强度因子的对比发现, 当裂纹长度较短时, b 端附近 K_{II} 大于 a 端, 说明此时裂纹更容易往内部扩展; 而当裂纹较长时, b 端附近 K_{II} 小于 a 端, 说明此时裂纹更容易往表面扩展。

4) 在裂纹面摩擦系数 $f=0.3$, 外载荷中心处于 $y=L$ 和 $y=2L$ 时, 整个裂纹面产生剪切方向的正向滑移;

而当载荷处于 $y=3L$, 裂纹长度小于 1.0 时, 裂纹上端有局部会产生粘着, 即裂尖 a 端附近 $K_{II}=0$ 。裂纹面摩擦系数 $f=0.5$, 当载荷处于 $y=L$ 时, 整个裂纹面产生剪切方向的正向滑移; 而当载荷处于 $y=2L$ 或 $y=3L$, 裂纹长度分别小于 1.17 和 2.86 时, 裂纹上端有局部会产生粘着。由此得出, 外载荷一定时, 摩擦系数越大, 裂纹上端产生的粘着区越大, 摩擦系数由 0.3 增加到 0.5 时, 产生粘着的临界裂纹长度将由 1.0 增加到 2.86。

4.2 裂纹埋入深度对 K_{II} 的影响

取裂纹长度为定值 ($(b-a)/L=1$), 计算了赫兹压力移动过程中应力强度因子 K_{II} 的变化曲线, 如图 6 所示。从图 6 中可以看到:

1) 当裂纹长度一定, 赫兹压力位于同一位置时, 裂纹长度对裂尖应力强度因子 K_{II} 的影响一定, 故该工况下 K_{II} 只受外载荷的影响。当裂纹较短时, 裂纹 a 端附近 K_{II} 随着裂纹长度的增加而增加, 说明随裂纹埋入深度的增加, 裂纹 a 端附近的应力集中程度越强, 此时裂纹更容易扩展; 而当裂纹长度增加到一定值时, a 端 K_{II} 随着裂纹长度的增加而减小, 说明随裂纹埋入深度的增加, 裂纹 a 端附近的应力集中程度变弱, 此时裂纹不容易发生扩展。

2) 当裂纹较短时, 裂纹 b 端附近 K_{II} 随着裂纹长

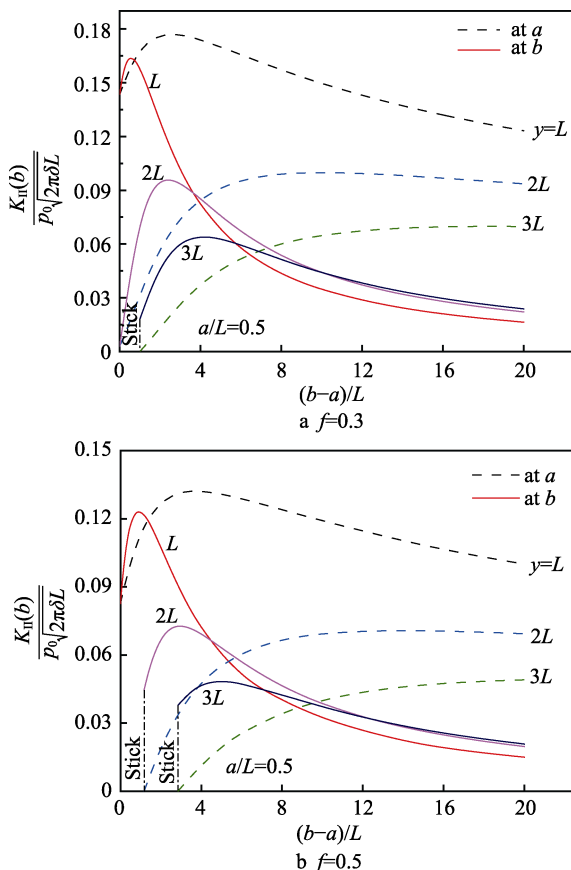


图 5 裂纹长度对 K_{II} 的影响
Fig.5 Influence of crack length on K_{II}

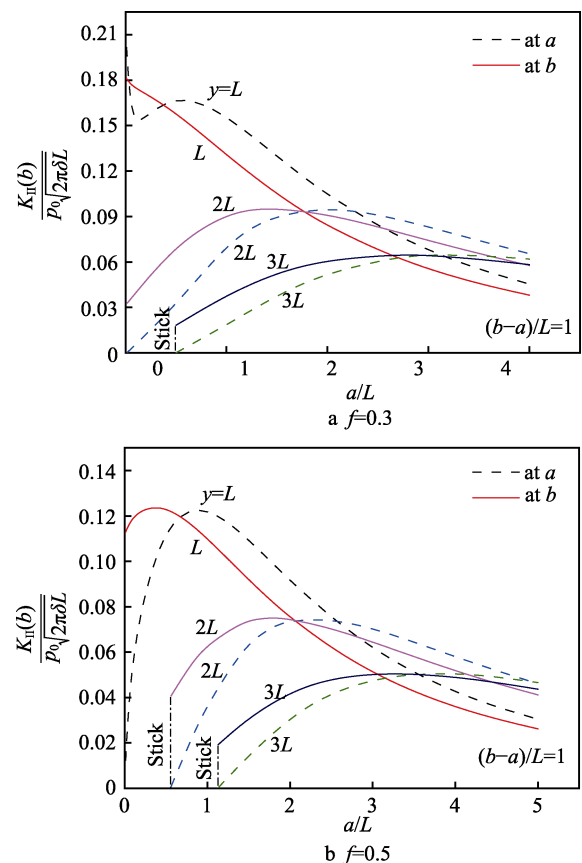


图 6 裂纹埋入深度对 K_{II} 的影响
Fig.6 Influence of crack penetration depth on K_{II}

度的增加而增加,说明随裂纹埋入深度的增加,裂纹**b**端附近的应力集中程度越来越强,此时裂纹更容易扩展;当裂纹埋入深度增加到一定值时,**b**端 K_{II} 随着裂纹埋入深度的增加而较**a**端快速减小,说明此时随裂纹埋入深度的增加,裂纹**b**端附近的应力集中程度更快地变弱,裂纹越不容易发生扩展。

3)从裂纹尖端应力强度因子的对比发现,当裂纹埋入深度较小时,**b**端附近 K_{II} 大于**a**端,说明此时裂纹更容易往内部扩展;而当裂纹埋入深度较大时,**a**端附近 K_{II} 略大于**b**端,但都比较接近于0,说明此时裂纹扩展很难。

4)当裂纹面摩擦系数 $f=0.3$,外载荷中心处于 $y=L$ 或 $y=2L$ 时,整个裂纹面产生剪切方向的正向滑移;当载荷处于 $y=3L$,裂纹埋入深度小于0.5时,裂纹上端会有局部产生粘着。裂纹面摩擦系数 $f=0.5$,载荷处于 $y=L$ 时,整个裂纹面产生剪切方向的正向滑移;当载荷处于 $y=2L$ 或 $y=3L$,裂纹埋入深度分别小于0.56和1.13时,裂纹上端会有局部产生粘着。由此得出,外载荷一定时,裂纹面摩擦系数越大,裂纹上端越容易发生粘着,而且产生的粘着区越大。摩擦系数由0.3增加到0.5时,产生粘着的临界裂纹埋入深度将由0.5增加到1.13;

5)当载荷处于 $y=L$,且裂纹埋入深度非常小接近于自由表面时,裂纹**a**端的应力强度因子 K_{II} 是趋于无限大的。因为这时裂纹**a**端具有奇异的剪应力梯度,此时裂纹在**a**端极易滑开。

4.3 裂纹长度对临界摩擦系数 f 的影响

所谓临界摩擦系数,就是当裂纹的长度以及裂纹**a**端距上表面距离一定时,裂纹**a**端附近区域由剪切方向的滑移状态过渡到粘着的临界状态,此时裂纹**a**端附近应力的强度因子 $K_{II}=0$ 。对临界摩擦系数的研究,有助于了解当前工况下裂纹面的状态,更进一步知道当裂纹面有局部粘着时,裂纹尖端附近就会弱化应力集中效应,从而阻止裂纹的扩展。

在裂纹埋入深度一定的情况下,临界摩擦系数 f 随裂纹长度的变化曲线如图7所示,其中图7a、b、c分别为赫兹压力中心移动到 $y=L$ 、 $y=2L$ 和 $y=3L$ 时,裂纹埋入深度分别为 $a/L=0.1$ 、0.3、0.5、0.7工况下,裂纹长度对 f 的影响。可以看到,临界摩擦系数 f 随裂纹长度的增加而缓慢增加,近似呈线性增加。当裂纹面摩擦系数小于临界值时,整个裂纹面就会发生滑移;超过临界值时,裂纹**a**端裂尖附近就会有局部区域产生粘着。随摩擦系数超过临界值越大,产生粘着的区域越大。如图7d所示,在一定埋入深度($a/L=0.3$),同一裂纹长度下,赫兹压力移动过程中,越远离裂纹面,使得裂纹**a**端产生粘着的临界摩擦系数 f 越小。主要是因为越远离裂纹面,外载荷在裂纹面处产生的应力越小,此时裂纹保持闭合状态。综上可知,在裂纹埋入深度一定时,临界摩擦系数 f 都随裂纹变长而增加。说明裂纹越短,裂尖**a**端附近更容易发生粘着,相应扩展就会更难。

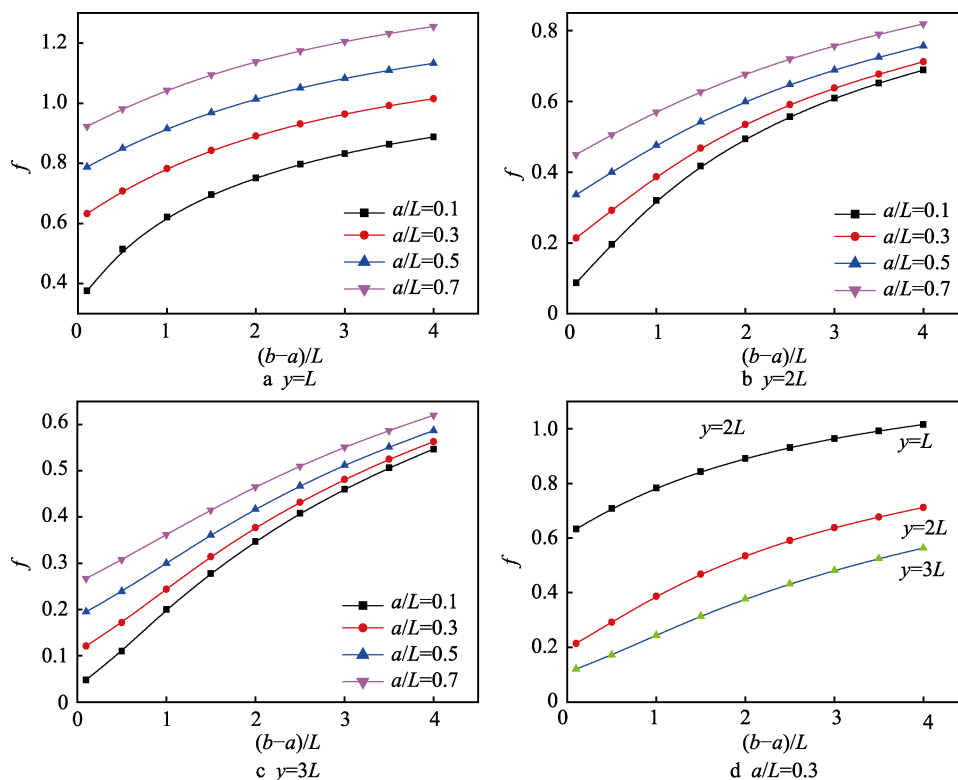


图7 裂纹长度对临界摩擦系数 f 的影响

Fig.7 Influence of crack length on threshold friction coefficient f

4.4 裂纹埋入深度对临界摩擦系数 f 的影响

在裂纹长度一定的情况下, 临界摩擦系数 f 随裂纹埋入深度的变化曲线如图 8 所示, 其中图 8a、b、c 分别为赫兹压力中心移动到 $y=L$ 、 $y=2L$ 和 $y=3L$ 时, 裂纹长度分别为 $(b-a)/L=0.1$ 、 0.3 、 0.5 、 0.7 工况下, 裂纹埋入深度对 f 的影响。可以看到, f 随裂纹埋入深度的增加而增加, 近似呈线性增加。当裂纹面摩擦系数小于临界值时, 整个裂纹面就会发生滑移; 超过临界值时, 裂纹 a 端裂尖附近就会有局部区域产生粘

着。随摩擦系数超过临界值越大, 产生粘着的区域越大。如图 8d 所示, 在一定裂纹长度 $(b-a)/L=0.3$, 同一裂纹埋入深度下, 赫兹压力移动过程中, 越远离裂纹面, 使得裂纹 a 端产生粘着的 f 越小。主要是由于越远离裂纹面, 外载荷在裂纹面处产生的应力越小, 此时裂纹保持闭合状态。综上可知, 在裂纹长度一定时, 临界摩擦系数 f 都随裂纹埋入深度的增加而增加。说明裂纹长度一定时, 越靠近表面, 裂尖 a 端附近更容易发生粘着, 相应扩展就会更难。

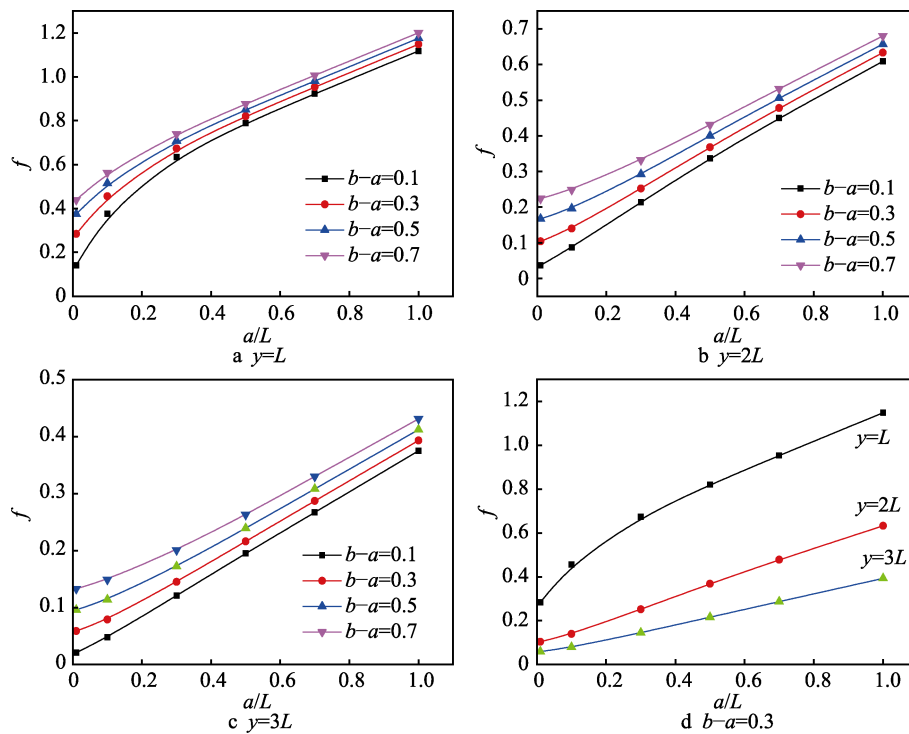


图 8 裂纹埋入深度对临界摩擦系数的影响

Fig.8 Influence of crack penetration depth on threshold friction coefficient

5 结论

1) 通过对移动赫兹压力作用下, 半无限大弹性平面内次表面裂纹问题的理论求解, 可以将该理论方法的求解思路及过程推广到求解更加复杂的非均匀载荷作用下的裂纹问题(如考虑真实轮轨载荷工况下的钢轨次表面裂纹问题)。

2) 在赫兹压力作用下, 当裂纹长度较短时, 裂纹更容易往内部扩展; 当裂纹较长时, 裂纹更容易往表面扩展。当裂纹埋入深度较小时, 裂纹更容易往内部扩展; 当裂纹埋入深度较大时, a 端附近 K_{II} 略大于 b 端, 但都比较接近于 0, 说明此时裂纹扩展很难。

3) 在赫兹压力作用下, 裂纹长度一定时, 越靠近表面, 裂尖 a 端附近更容易发生粘着, 相应扩展就会更难; 裂纹埋入深度一定时, 裂纹越短, 裂尖 a 端附近更容易发生粘着, 相应扩展就会更难。

4) 在赫兹压力移动过程中, 越远离裂纹面, 裂纹 a 端裂尖附近产生粘着的临界摩擦系数 f 越小, 说明外载荷越远离裂纹面, 整个裂纹将会被锁定保持封闭状态, 裂纹很难扩展。

参考文献:

- [1] LI Xiao-tao, JIANG Xiao-yu, LI Xu, et al. Solution of an inclined crack in a finite plane and a new criterion to predict fatigue crack propagation[J]. International journal of mechanical sciences, 2016, 217: 223.
- [2] 张言库, 杨鸿达, 咎晓东, 等. 半无限大体中次表面裂纹间的相互影响[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2017(10): 96-101.
ZHANG Yan-ku, YANG Hong-da, ZAN Xiao-dong, et al. Interaction among subsurface cracks in an elastic half-plane[J]. Journal of Chongqing University of Technol-

- ogy(Natural science), 2017(10): 96-101.
- [3] 吴雪萍, 邱一平, 曹兴国. 单轴压缩下含闭合裂纹大理石板裂纹扩展的研究[J]. 实验室研究与探索, 2015(7): 38-41.
WU Xue-ping, QIU Yi-ping, CAO Xing-guo. On the crack growth of marble slab with closed crack under uniaxial compression[J]. Laboratory research and exploration, 2015(7): 38-41.
- [4] 孟祥吉. 金属板中闭合裂纹混频非线性超声检测方法研究[D]. 北京: 北京工业大学, 2017.
MENG Xiang-ji. Study on nonlinear ultrasonic testing method of closed crack in metal plate[D]. Beijing: Beijing University of Technology, 2017.
- [5] ASHBY M F, HALLAM S D. The failure of brittle solids containing small cracks under compressive stress states [J]. Acta metallurgica, 1986, 34: 497-510.
- [6] SCHULSON E M, FORTT A L, ILIESCU D, et al. On the role of frictional sliding in the compressive fracture of ice and granite: Terminal vs. post-terminal failure[J]. Acta materialia, 2006, 54: 3923-3932.
- [7] RENSHAW C E, SCHULSON E M. Universal behaviour in compressive failure of brittle materials[J]. Nature, 2001, 412: 897.
- [8] HILL D A, KELLY P, DAI D, et al. Solution of crack problems: The distributed dislocation technique[M]. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [9] HILL D A, COMNINOU M. A normally loaded half-plane with an edge crack[J]. International journal of solids and structures, 1985, 24(4): 399-410.
- [10] DEWYNNE J N, HILLS D A, NOWELL D. Calculation of the opening displacement of surface-breaking plane cracks[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1992, 97(3): 321-331.
- [11] DUNDURS J, COMNINOU M. An educational elasticity problem with finite friction, part 1: Loading and unloading for weak friction[J]. Journal of applied mechanics, 1981, 48(4): 841-845.
- [12] DUNDURS J, COMNINOU M. Frictional slip in elasticity: An example[J]. ASCE J Eng Mech, 1982, 110(9): 344-353.
- [13] DUNDURS J, COMNINOU M. An educational elasticity problem with finite friction, Part 3: General load paths[J]. Journal of applied mechanics, 1983, 50(4): 77-84.
- [14] SCHMUESER D M, COMNINOU J D. Separation and slip between a layer and a substrate caused by a tensile load[J]. International journal of engineering science, 1980, 18(9): 1149-1155.
- [15] 咎晓东, 王强胜, 江晓禹, 等. 考虑塑性的钢轨表面疲劳微裂纹分析[J]. 表面技术, 2018, 47(11): 151-156.
ZAN Xiao-dong, WANG Qiang-sheng, JIANG Xiao-yu et al. Analysis of fatigue micro-crack on rail surface under plasticity[J]. Surface technology, 2018, 47(11): 151-156.
- [16] 曹世豪, 江晓禹, 文良华. 轴重和摩擦力对轮轨接触疲劳的影响[J]. 表面技术, 2013, 42(6): 10-14.
CAO Shi-hao, JIANG Xiao-yu, WEN Liang-hua. Influence of axle load and friction on the fatigue of wheel /rail contact[J]. Surface technology, 2013, 42(6): 10-14.
- [17] 曹世豪, 李煦, 文良华, 等. 钢轨表面裂纹扩展方向研究[J]. 表面技术, 2014, 43(3): 37-42.
CAO Shi-hao, LI Xu, WEN Liang-hua. Analysis of propagation direction of rail surface crack[J]. Surface technology, 2014, 43(3): 37-42.
- [18] JUNG-Kyu Kim, CHUL-Su Kim. Fatigue crack growth behavior of rail steel under mode I and mixed mode loadings[J]. Materials science and engineering, 2002(12): 191-201.
- [19] SALEHIZADEH H, SAKA N. Crack propagation in rolling line contacts[J]. Journal of tribology, 1992, 114(4): 690-697.
- [20] DUNDURS J, SENDECKYJ G P. Behavior of an edge dislocation near a bimetallic interface[J]. Journal of applied physics, 1965, 36(10): 3353-3354.
- [21] DUNDURS J, MURA T. Interaction between an edge dislocation and a circular inclusion[J]. Journal of the mechanics & physics of solids, 1964, 12(3): 177-189.
- [22] COMNINOU M, BARBER J R. Frictional slip between a layer and substrate due to a periodic tangential force[J]. International journal of solids and structures, 1983, 19(6): 533-539.
- [23] COMNINOU M, BARBER J R, DUNDURS J. Interface slip caused by a surface load moving at constant speed[J]. International Journal of mechanical sciences, 1983, 25(1): 41-46.
- [24] CHANG F K, COMNINOU M, BARBER J R. Slip between a layer and a substrate caused by a normal force moving steadily over the surface[J]. International journal of mechanical sciences, 1983, 25(11): 803-809.
- [25] CHANG F K, COMNINOU M, SHEPPARD S, et al. The subsurface crack under conditions of slip and stick caused by a surface normal force[J]. J Appl Mech, 1984, 51(2): 311-316.
- [26] 徐芝纶. 弹性力学简明教程 [M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2002.
XU Zhi-lun. Elastic mechanics concise course[M]. Third edition. Beijing: Higher Education Press, 2002.
- [27] 同济大学应用数学与力学系. 高等数学第五版下册 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
Department of applied mathematics and mechanics tongji university. The fifth edition of advanced mathematics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2002.
- [28] ERDOGAN F, GUPTA G D, COOK T S. Numerical solution of singular integral equations[M]. Berlin: Springer, 1973.
- [29] KAYA A C, ERDOGAN F. On the solution of integral equations with strongly singular kernels[J]. Quarterly of applied mathematics, 1987, 45(1): 105-122.
- [30] KRENK S. On the use of the interpolation polynomial for solutions of singular integral equations[J]. Quarterly of applied mathematics, 1975, 32(4): 479-484.