涂层风沙冲蚀损伤表面分形维数预测模型

郝贠洪[1a,1b,2]，张飞龙[1a]，宣姣羽[1c]，刘艳晨[1c]

（1.内蒙古工业大学 a.土木工程学院 b.内蒙古自治区土木工程结构与力学重点试验室 c.理学院，呼和浩特 010051；2.内蒙古自治区建筑检测鉴定与安全评估工程技术研究中心，呼和浩特 010051）

摘要：目的 建立涂层风沙冲蚀损伤表面分形维数预测模型，重构冲蚀损伤表面形貌，为涂层风沙冲蚀损伤表面形貌研究提供基础。**方法** 进行了聚氨酯防腐面漆涂层风沙冲蚀损伤试验，建立了多粒径粒子冲击模型，利用赫兹接触理论求解冲击损伤面积及其分布概率，分析表面损伤的演化规律得到损伤面积增长迭代关系式，结合分形分布理论求解损伤表面分形维数，分析不同参数对理论模型的影响。利用理论模型重构损伤表面形貌、预测表面分形维数并与试验结果进行对比分析。**结果** 冲蚀试验中，随冲蚀时间、角度的增加，随机均匀分布的损伤区域逐渐叠加联通，分形维数也随之增大；表面分形维数存在最大值，斜角度下单粒子冲击损伤区域为彗星形。理论模型中，主导粒子粒径越大，分形维数初期增长速度越慢；冲击损伤面积越大，分形维数初期增长速度越快；损伤尺度系数越大，分形维数最大值越大；冲蚀前损伤面积越大，初始分形维数越大。对比理论模型与试验结果，重构损伤表面形貌损伤演化规律与试验结果相似，表面形貌余弦相似性及分形维数相关性系数均大于 0.9。**结论** 通过分析固体粒子冲蚀现象特点和试验结果，发现风沙冲蚀是非线性的反馈的动力学系统，涂层冲蚀表面形貌具有迭代的损伤演化过程。基于此建立涂层风沙冲蚀损伤表面分形维数预测模型，可利用风沙流参数有效预测不同冲蚀时间下损伤表面分形维数、重构损伤表面形貌。理论模型预测结果与试验结果具有较高的相似性，可以为涂层风沙冲蚀损伤表面形貌研究提供基础。

关键词： 风沙冲蚀；形貌；分形维数；赫兹接触理论；分形分布理论；预测模型

中图分类号： TH117.1 **文献标识码：** A **文章编号：** 1001-3660(2022)04-0127-12

DOI： 10.16490/j.cnki.issn.1001-3660.2022.04.012

扫码查看文章讲解

Fractal Dimension Prediction Model of Coating Damage Surface by Wind-sand Erosion

HAO Yun-hong[1a,1b,2], *ZHANG Fei-long*[1a], *XUAN Jiao-yu*[1c], *LIU Yan-chen*[1c]

(1. a. School of Civil Engineering, b. The Inner Mongolia Key Laboratory of Civil Engineering Structure and Mechanics, c. School of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, China; 2. The Inner Mongolia Research

收稿日期： 2021-04-19；**修订日期：** 2021-08-30

Received: 2021-04-19; **Revised:** 2021-08-30

基金项目： 国家自然科学基金（11862022）；内蒙古自治区自然科学基金项目（2018MS0547）；内蒙古自治区青年科技英才支持计划（NJYT-17-A09）

Fund: Supported by the National Natural Science Foundation of China (11862022); the Natural Science Foundation of Inner Mongolia Autonomous Region (2018MS0547); the Youth Science and Technology Talent Support Program (NJYT-17-A09)

作者简介： 郝贠洪（1977—），男，博士，教授，主要研究方向为区域特殊环境下工程结构和材料耐久性损伤及评价。

Biography: HAO Yun-hong (1977—), Male, Doctor, Professor, Research focus: engineering structure and material durability damage and evaluation under special regional environment.

引文格式： 郝贠洪，张飞龙，宣姣羽，等. 涂层风沙冲蚀损伤表面分形维数预测模型[J]. 表面技术, 2022, 51(4): 127-138.

HAO Yun-hong, ZHANG Fei-long, XUAN Jiao-yu, et al. Fractal Dimension Prediction Model of Coating Damage Surface by Wind-sand Erosion[J]. Surface Technology, 2022, 51(4): 127-138.

Center for Building Inspection, Identification and Safety Assessment, Hohhot 010051, China)

ABSTRACT: In this paper, the fractal dimension prediction model of coating damage surface by wind-sand erosion was established, and the erosion damage surface morphology was reconstructed, which provides the basis for the study of coating wind-sand erosion damage surface morphology. The sand erosion damage test of polyurethane anticorrosive topcoat coating was carried out, the impact model of multi-particle was established, particle impact damage area and distribution probability were solved by using the Hertz contact theory. By described the evolution law of surface damage, the iterative relationship of the increase of damage area was obtained. And combined with the theory of fractal distribution, the fractal dimension of damaged surface was solved. Finally, analyzes the influence of different parameters on the theoretical model, The theoretical model was used to reconstruct the surface morphology of erosion damage, predict the fractal dimension of damage surface, and compared it with experimental results. In the erosion experiment, with the increase of erosion time and angle, the random and evenly distributed damage areas will overlap and connect with each other, and the fractal dimension will also increase. The surface fractal dimension has a maximum value, and the single-particle impact damage area under oblique angle is a comet. In the theoretical model, the larger the dominant particle size, the slower the initial growth rate of the fractal dimension. The larger the impact damage area, the faster the growth rate of the fractal dimension. The larger the damage scale factor, the larger the maximum value of the fractal dimension. The larger the damage area before erosion, the larger the initial fractal dimension. Comparing the theoretical model with the experimental results, the damage evolution law of the reconstructed damage surface morphology was similar to the experimental results, and the cosine similarity of surface topography and the correlation coefficient of fractal dimension were both greater than 0.9. By analyzing the characteristics of solid particle erosion and experimental results, it was found that wind-sand erosion is a nonlinear feedback dynamic system, and coating erosion surface morphology has iterative damage evolution process. Based on this, the fractal dimension prediction model of coating wind-sand erosion damage surface was established. The wind-sand flow parameters can be used to effectively predict the fractal dimension of the damage surface and reconstruct the damage surface morphology under different erosion time. The predicted results of the theoretical model have a high similarity with the experimental results, which can provide a basis for the study of the surface morphology of wind-sand erosion damage.

KEY WORDS: wind-sand erosion; morphology; fractal dimension; Hertz contact theory; fractal distribution theory; prediction model

风沙冲蚀现象[1]广泛地存在于我国中西部地区，是工业结构和材料破坏的重要原因之一，准确描述冲蚀现象，解释损伤机理，对于延长工业结构使用寿命具有重要意义[2-3]。为此，研究人员提出微切削理论[4]、变形磨损理论[5]、锻压挤压理论[6]、弹塑性压痕破裂理论[7]、二次冲蚀理论[8]、绝热剪切与变形局部化磨损[9]、低周疲劳理论[10]、脱层理论[11]等理论来解释冲蚀现象。不过，上述理论多是对冲蚀损伤力学机理的揭示，描述单颗粒冲击损伤形貌变化较成功，用于定量表征损伤表面形貌全局变化尚有困难。自 Mandelbrot 创立分形理论[12]以来，就被大量应用于粗糙表面的研究[13-14]，利用其标度不变形的特点，可以有效、准确地表征[15-16]和重构[17-18]复杂精细零碎的表面结构。现有研究已证明[19-20]冲蚀损伤表面同样具有自相似性和无标度性的特征，符合使用分形理论的条件。因此，不少学者使用分形理论表征冲蚀损伤表面[19-21]，揭示冲蚀损伤机理[22]。

准确预测不同冲蚀损伤条件下涂层损伤表面的分形维数，重构损伤表面形貌，为涂层风沙冲蚀损伤表面形貌研究提供理论依据。本文进行了聚氨酯防腐面漆涂层冲蚀试验，通过分析冲蚀损伤的动力学过程建立了多粒径粒子冲击模型，基于赫兹接触理论求解此模型中不同风沙流参数、不同粒径粒子冲击下表面的冲击损伤面积及其分布概率，重构了损伤表面形貌。通过描述损伤表面形貌的迭代过程，结合分形分布理论预测了损伤表面分形维数。最后，分析了不同参数对分形维数预测模型的影响，并将理论模型结果与试验结果对比分析。

1 试验

1.1 材料及方法

冲蚀试验采用气流挟沙喷射法，使用风沙环境侵蚀试验系统模拟沙尘暴环境下涂层的风沙冲蚀，如图 1 所示。试件尺寸为 80 mm×80 mm，基体使用 Q235 普通低碳钢，涂层使用厚度为 320 μm 的聚氨酯防腐面漆。试验使用的风沙沙粒取自内蒙古中西部库布齐沙漠，粒径级配见表 1。使用激光共聚焦显微镜

（LSCM）提取涂层损伤表面形貌图像，图像像素为 1 024×1 024，尺寸为 2 560 μm×2 560 μm。取样点为损伤面椭圆交点，以保证所有试件的取样点均被风沙流中轴线穿过，如图 2 所示。

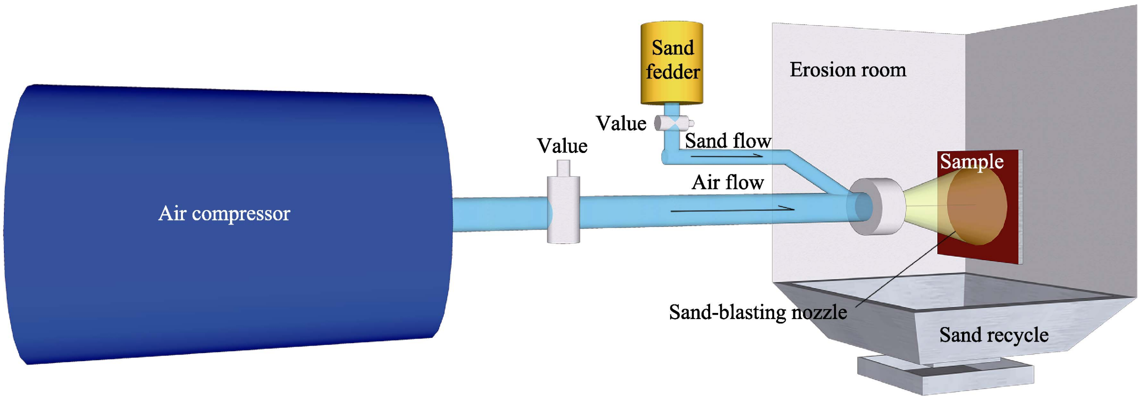


图 1　模拟风沙环境侵蚀试验系统示意图
Fig.1 Sketch map of simulated wind-sand environment erosion experiment system

表 1　库布齐沙漠粒径分布
Tab.1 Particle size distribution in Kubuqi desert

Particle size/mm	<0.05	<0.1	<0.25	<0.5	>0.5
Contents/%	8.96	37.53	50.82	1.74	0.66

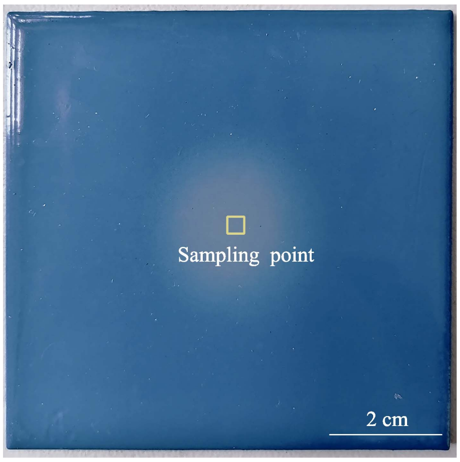


图 2　涂层损伤表面形貌取样位置
Fig.2 Sampling position of coating damage surface morphology

1.2　风沙流参数设置

使用风沙环境侵蚀试验系统模拟风沙冲蚀现象，需要设置风沙流参数。文中设置的风沙流参数为：冲蚀速度 12 m/s；冲蚀时间 5、10、15、20、25、30、60、90、120 s；下沙率 7 g/min；冲蚀角度 15°、30°、45°、60°、75°、90°；涂层试件距出风口 10 cm。可利用相似理论[23]将上述风沙流参数转换为实际沙尘天气工况，计算过程如下。

当冲蚀角为 90°时，测得距出风口 10 cm 处风沙过流区域为直径 15 cm 的圆形区域，则实际沙尘过流面积 A=A_m=0.070 7 m^2。但风沙环境侵蚀试验系统模拟的风沙流中沙粒分布并不均匀，呈现中间多、两边少的特点。利用仪器收集单位时间内距出风口 10 cm 处过流区域内沙尘浓度分布数据后可知，取样点处的沙尘浓度为平均沙尘浓度的 4.52 倍，既 Q_m 需乘 4.52。沙尘质量浓度 Q 与下沙率 M_s、冲蚀面积 A、冲蚀速度 V 的关系为：

$$Q=\frac{M_s}{VA} \tag{1}$$

查表 2 可知，扬沙等级最强沙尘质量浓度为 2 000 μg/m^3，风速为 12 m/s，换算为下沙率：

$$M_p=QVA=0.101\,784\,6 \text{ g/min} \tag{2}$$

表 2　沙尘天气分类对应的沙尘浓度及风速
Tab.2 Relationship between sandstorm weather classification and dust mass concentration and wind velocity

Sandstorm weather classification	Dust mass concentration/ (μg·m^{-3})	Wind velocity/ (m·s^{-1})
Floating dust	200~500	<9
Yangsha	500~2 000	9~12
Sandstorm	2 000~5 000	12~19
Strong sandstorm	5 000~20 000	19~23
Extra strong sandstorm	>20 000	>23

速度相似比为：

$$C_v=\frac{V_m}{V_p}=1 \tag{3}$$

质量相似比为：

$$C_m=\frac{M_m}{M_p}=68.773 \tag{4}$$

冲蚀面积相似比为：

$$C_A=\frac{A_m}{A_p}=1 \tag{5}$$

将式（3）—（5）代入式（1）可得沙尘质量浓度相似比为：

$$C_Q=\frac{4.52Q_{\rm m}}{Q_{\rm p}}=\frac{4.52\times\dfrac{M_{\rm m}}{V_{\rm m}A_{\rm m}}}{\dfrac{M_{\rm p}}{V_{\rm p}A_{\rm p}}}=311.13 \tag{6}$$

由式（6）可知，模拟试验中冲蚀 1 s 可以模拟最强扬沙等级沙尘暴（沙尘质量浓度 2 000 μg/m^3，风速 12 m/s）冲蚀 311.13 s 所造成的损伤，通过改变冲蚀时间即可模拟对应实际沙尘暴的爆发次数。例如，模拟试验中冲蚀 120 s 相当于实际工况中连续 4.15 a，每年发生 5 次持续时间为 30 min 的扬沙等级沙尘暴，查阅相关资料后[24]，认为符合内蒙古地区实际沙尘天气情况。

1.3　试验结果及分析

图 3 为冲蚀角度为 90°、不同冲蚀时间下涂层表面形貌的灰度图像。可以看出，大小各异的损伤区域分布均匀随机，随着冲蚀时间的增加而增加，并且逐渐连通成条带状，最终布满表面。表 3 为不同冲蚀时间下涂层表面形貌灰度图像的分形维数。可以看出，随着冲蚀时间的增加，分形维数不断增加，直至达到最大值后不再变化。因为分形维数越大，说明表面结构越精细复杂，损伤也就越严重，当表面无法再继续增加损伤细节时，分形维数就达到了最大值。而表面损伤的最小尺度与材料表面能[25]有关。一般来说，表面能越大，损伤尺寸越大，故表面最大分形维数与材料相关。

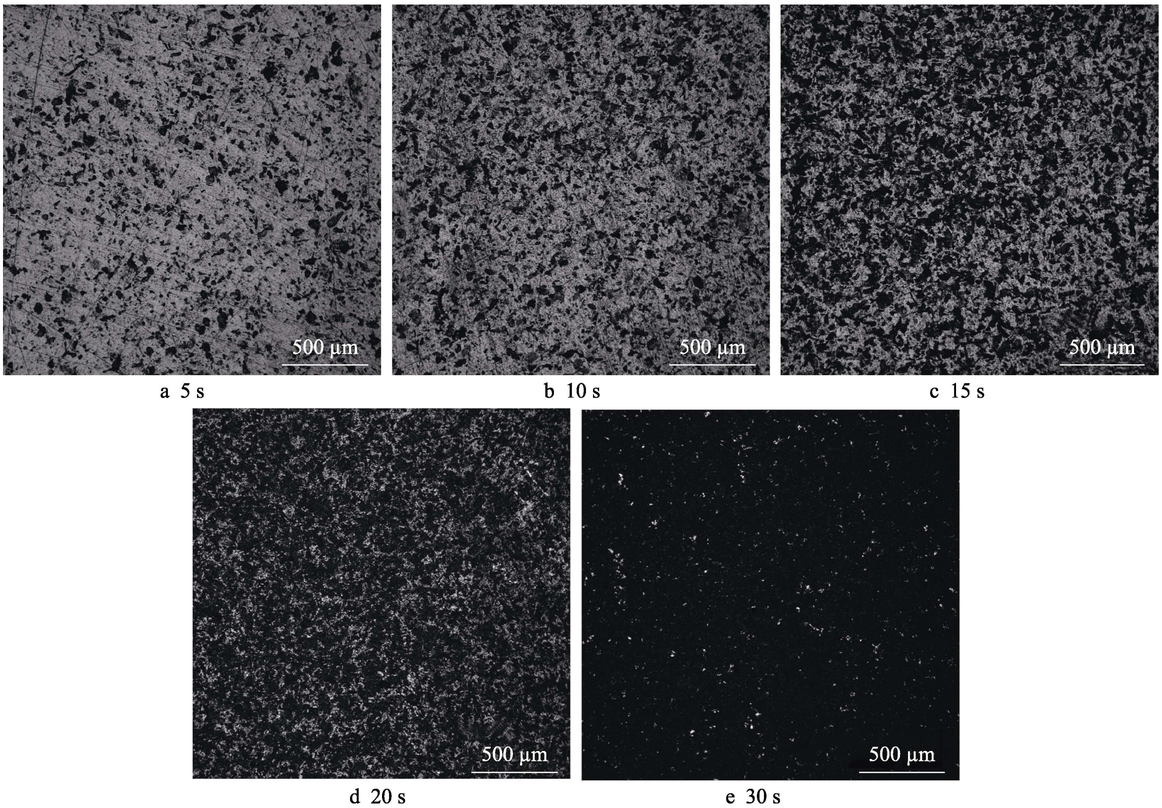


图 3　不同冲蚀时间下涂层的损伤图像
Fig.3 Coating damage images under different erosion time

表 3　不同冲蚀时间下损伤图像的分形维数
Tab.3 Fractal dimension of damage images under different erosion time

Erosion time/s	Fractal dimension
5	1.770 9
10	1.786 4
15	1.815 5
20	1.826 1
25	1.850 5
30	1.888 2
60	1.893 2
90	1.904 6
120	1.904 7

图 4 为冲蚀时间为 25 s、不同冲蚀角度下涂层表面形貌的灰度图像。可以看出，损伤区域的全局分布同样均匀随机，并且逐渐连通成条带状，最终布满表面，且单个冲击损伤面积随着冲蚀角度的增加而增加。图 5 为不同冲蚀角度下单粒子冲击涂层的损伤图像。可以看出，损伤区域呈彗星形，慧尾指向粒子冲击方向，且损伤区域的长宽比随着冲蚀角度的增加而减小。因为风沙粒子的冲击力可分解为平行于表面的切向力和垂直于表面的竖向力，当粒子首次接触涂层时，冲击力的竖向分量最大，粒子在切向力作用下移动的同时，竖向力、切向力均逐渐衰减。由于接触半径由冲击力的竖向分量控制，故损伤区域头部接触半径最大，并向尾部收缩，直至粒子离开涂层表面，使

单粒子损伤区域由圆形拉长为彗星形。同时，实测后同一冲蚀角度下单粒子冲击损伤区域的长宽比可视为常数，说明损伤区域面积主要由最大接触半径控制，而冲蚀角度越大，冲击力竖向分量越大，最大接触半径也越大，故涂层表面冲击损伤面积随冲蚀角度的增加而增加。表 4 为不同冲蚀时间下涂层表面形貌

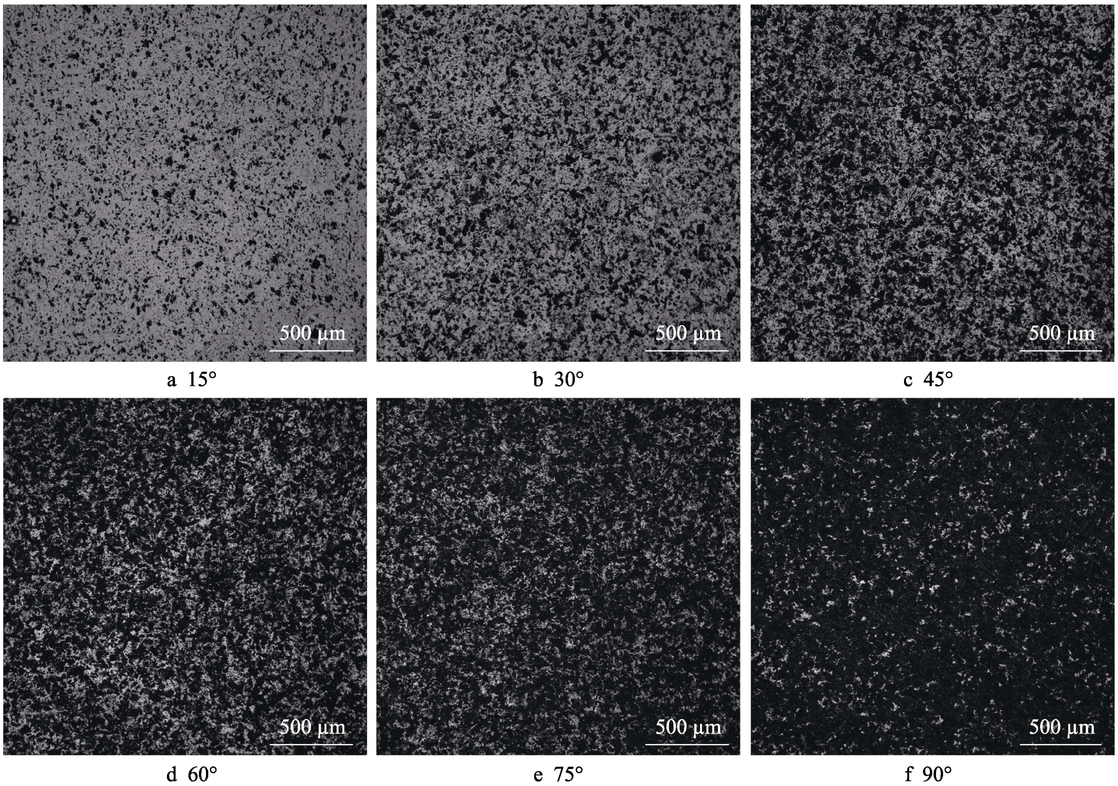


图 4　不同冲蚀角度下涂层的损伤图像

Fig.4 Coating damage images under different erosion angle

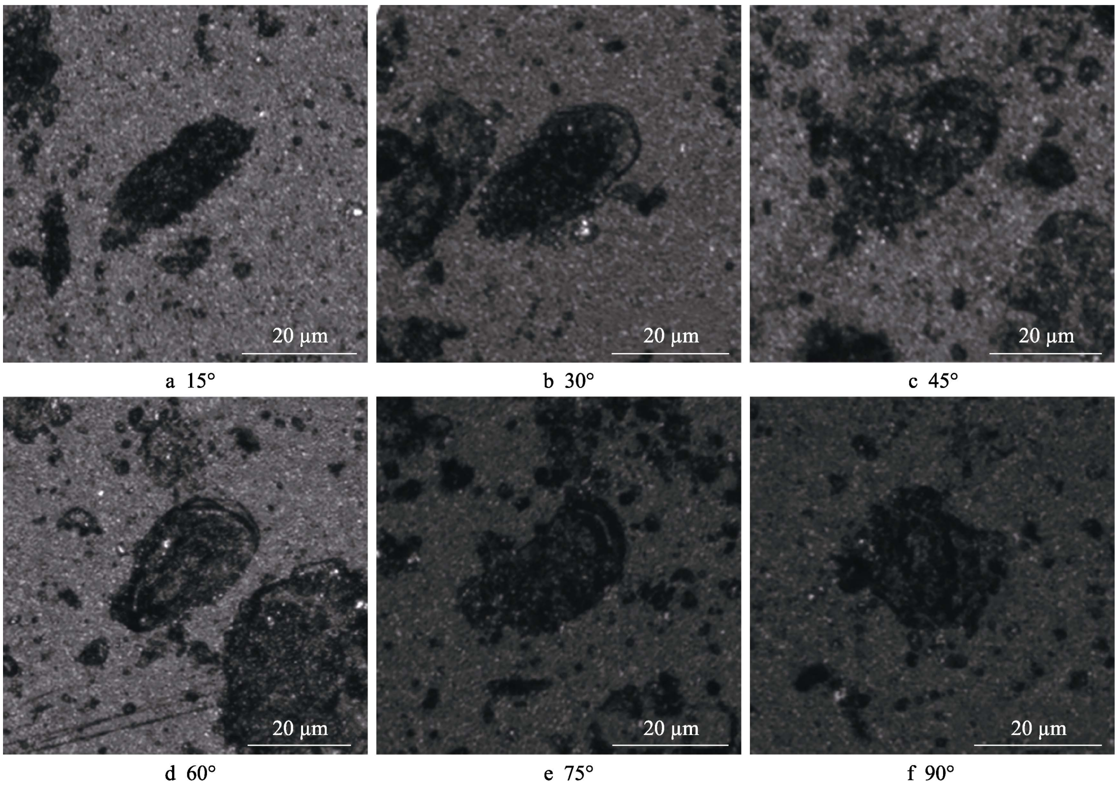


图 5　不同冲蚀角度下单粒子冲击涂层的损伤图像

Fig.5 Damage images of single particle impact coating under different erosion angle

表 4　不同冲蚀角度下损伤图像的分形维数
Tab.4 Fractal dimension of damage images under different erosion angle

Erosion angle/(°)	Fractal dimension
15	1.753 8
30	1.797 6
45	1.816 3
60	1.834 9
75	1.843 1
90	1.850 5

灰度图像的分形维数。可以看出，随着冲蚀角度的增加，分形维数不断增加，说明表面损伤越严重。

2　冲蚀损伤表面分形维数预测模型的建立

风沙冲蚀是指大量松散沙粒对材料表面持续冲击，进而造成材料的累积损伤及磨耗的一种物理现象。结合图 3、图 4 分析冲蚀现象的动力学过程，将其简化为高速气流携带大量不同粒径粒子冲击材料表面，在冲蚀表面造成随机损伤，损伤分布均匀、尺度很小，同时可能发生重叠。由图 6 可以看出这是反馈系统，下一刻的粒子将冲击在上一刻的损伤表面上，冲蚀表面具有迭代的损伤过程。

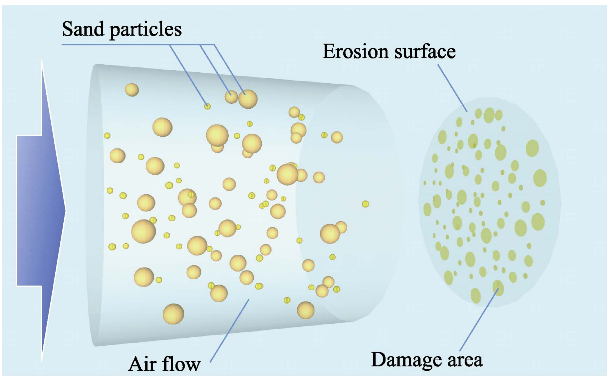


图 6　多粒径粒子冲击模型
Fig.6 Multi-particle impact model

2.1　多粒径粒子接触模型的建立

风沙流沙粒组成一般按级配参数分为 i 种，本文 i=5。计算单位质量风沙流所含的不同粒径沙粒数 N_i 及沙粒总数 N，其表达式为：

$$m_i = \frac{\pi d_{s_i}^3}{6}\rho \tag{7}$$

$$n_i = n\delta_i \tag{8}$$

$$1 = \sum_{i=1}^{5} N_i m_i \tag{9}$$

式中：d_{s_i} 为不同沙粒粒径，mm；ρ 为沙粒密度，g/cm^3；m_i 为不同粒径沙粒质量，g；δ_i 为不同粒径沙粒占比；N_i 为单位质量不同粒径沙粒数；N 为单位质量沙粒总数。

因风沙粒子微小，转动惯性可不考虑，双方接触区材料变形惯性力和涂层弧度也可忽略，而且沙粒往往接近球形，故粒子冲击表面可以被描述为一个球形粒子冲击半无限体的准静态模型。赫兹接触理论[26]可以描述这一过程，见图 7。当风沙粒子的冲击角度为 90°时，接触区域为圆形；当冲击角度小于 90°时，在 P_x 的作用下损伤区域将向粒子冲击方向延长，可利用椭圆面积公式 πab 求此冲击损伤区域面积，见图 8。

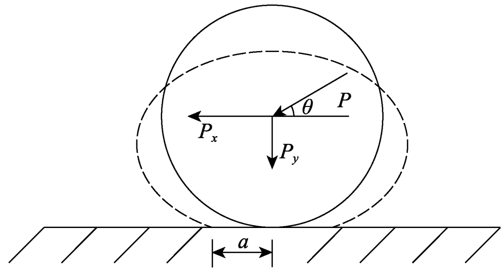


图 7　赫兹接触模型
Fig.7 Hertz contact model

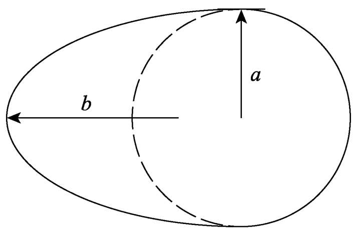


图 8　单粒子接触区域平面模型
Fig.8 Plane model of single particle contact area

利用赫兹接触理论推导不同粒径沙粒的最大竖向冲击力 $P_{y\max i}$ 及最大接触半径 a_i。而粒子最大接触面积一般大于实际的冲击损伤面积，故利用有效损伤系数 ξ 修正。ξ 为冲击损伤区域短轴半径与理论最大接触半径之比的平方，V_y 越大，ξ 越大。因为接触区压应力由中心向边缘递减，V_y 越大，$P_{y\max i}$ 越大，接触区域边缘涂层也越容易屈服。当冲击速度竖向分量大于 15 m/s 时，可视为全部接触区域均屈服[26]，实测数据见表 5。同时，斜角度下冲击损伤区域为彗星形，故利用接触区域形状系数 γ 修正。γ 为损伤区域长轴半径与短轴半径之比，θ 越大，γ 越小。因为粒子横向滑移距离和最大接触半径的比值与表面摩擦因数和冲蚀角度有关[27]，实测数据见表 6。相关表达式见式（10）—（14）。

$$V_y = V\sin\theta \tag{10}$$

$$P_{y\max i} = \left[\frac{125}{36}\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)^{-2} \cdot \frac{d_{s_i}}{2} m_i^3 V_y^6\right]^{\frac{1}{5}} \tag{11}$$

$$a_i=\left[\frac{3}{4}\left(\frac{1-v_1^2}{E_1}+\frac{1-v_2^2}{E_2}\right)^{-1}\cdot\frac{d_{s_i}}{2}P_{y\max i}\right]^{\frac{1}{3}} \tag{12}$$

$$s_i=\gamma\xi\pi\alpha_i^2 \tag{13}$$

$$P(s_i)=\frac{s_i}{1} \tag{14}$$

式中：V 为沙粒冲击速度，m/s；θ 为冲蚀角度；V_y 为沙粒冲击速度竖向分量，m/s；v_1 为涂层泊松比；v_2 为沙粒泊松比；E_1 为涂层弹性模量；E_2 为沙粒弹性模量；$P_{\max i}$ 为不同粒径沙粒最大冲击力，N；s_i 为不同粒径沙粒冲击损伤面积，μm^2；$P(s_i)$ 为不同粒径沙粒损伤分布概率。

表 5　不同竖向冲击速度下的 ξ

Tab.5 ξ under different vertical erosion velocity

V_y/(m·s^{-1})	ξ
3	0.110
6	0.154
9	0.275
12	0.607
⩾15	1

为计算不同粒径沙粒冲击损伤间的相互作用，将单位时间内单位过流面积的气流携带的不同粒径沙粒分离，依次冲击至损伤表面，损伤叠加过程如图 9

表 6　不同冲蚀角度下的 γ

Tab.6 γ under different erosion angle

Erosion angle/(°)	γ
15	2.22
30	2.15
45	1.93
60	1.67
75	1.34
90	1

所示。因为相同粒径间沙粒的相互作用是不同粒径粒子间相互作用的特例，故考虑后者即可。以统计的角度分析上述过程可知，当单个损伤面足够小、足够离散时，单一粒径沙粒造成的损伤面积，一部分会叠加至其他粒径粒子已经造成的损伤面上，另一部分则会成为新的损伤面，而两者的比例为已损伤区域面积与未损伤区域面积之比。其表达式为：

$$S_i=S_{i-1}+\left(\frac{1-S_{i-1}}{1}\right)\cdot N_i\cdot s_i \qquad i=1,2,3,4,5 \tag{15}$$

$$S'=\sum_{i=1}^{5}S_i \tag{16}$$

式中：S_i 为单位质量沙粒中不同粒径沙粒实际冲击损伤面积，μm^2；S' 为单位质量沙粒冲击损伤面积，μm^2。

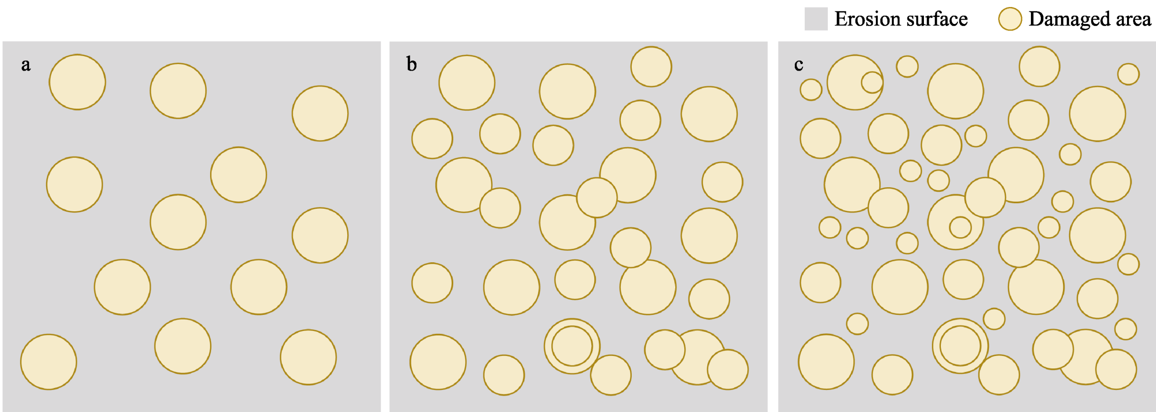


图 9　不同粒径粒子损伤叠加示意图

Fig.9 Damage superposition diagram of particles with different particle size

利用本文中参数，计算不同叠加顺序下的 S'，部分结果见表 7。结果显示，样本变异系数小于 0.003，故认为不同的叠加顺序对 S' 的影响可忽略。

结合风沙流参数，即可得单位时间单位过流面积上全部风沙粒子造成的冲击损伤总面积 S。其表达式为：

$$S=\rho_s\cdot V\cdot S' \tag{17}$$

式中：ρ_s 为沙尘浓度，μg/m^3；S 为单位时间单位面积冲击损伤总面积，m^2。

表 7　不同叠加顺序下 S'

Tab.7 S' under different stacking sequence

Stacking sequence (d_s)	S'/m^2
<0.05,<0.1,<0.25,<0.5,>0.5	0.041 799 8
<0.1,<0.25,<0.5,>0.5,<0.05	0.041 799 6
<0.25,<0.5,>0.5,<0.05,<0.1	0.041 824 1
<0.5,>0.5,<0.05,<0.1,<0.25	0.042 084 7
>0.5,<0.05,<0.1,<0.25,<0.5	0.041 920 4

2.2 表面损伤迭代模型建立

当风沙流稳定时，单位时间内单位过流面积的气流所携带的沙粒数是恒定的，故将要造成的冲击损伤总面积也是恒定的。但冲蚀损伤表面具有迭代的损伤过程，是反馈系统，下一刻表面损伤的变化率取决于上一刻损伤表面的状态。以统计的角度分析上述迭代过程可知，当单个损伤面足够小、足够离散时，单位时间单位过流面积内风沙流带来的冲击损伤总面积，一部分将叠加在已损伤区域上，另一部分则成为新增的损伤面积，而两者的比例为上一刻已损伤区域面积与未损伤区域面积之比，迭代过程如图 10 所示。其表达式为：

$$A_t = A_{t-1} + \frac{1 - A_{t-1}}{1} \cdot S = A_{t-1} \cdot (1 - S) + S \quad t = 1, 2, 3, \cdots \tag{18}$$

式中：t 为冲蚀时间，s；A_t 为 t 时刻冲蚀表面单位面积上的冲蚀损伤总面积，m^2。当冲蚀前（t=0）表面无损伤时，A_0=0；有损伤时，A_0 为已损伤面积的比例。

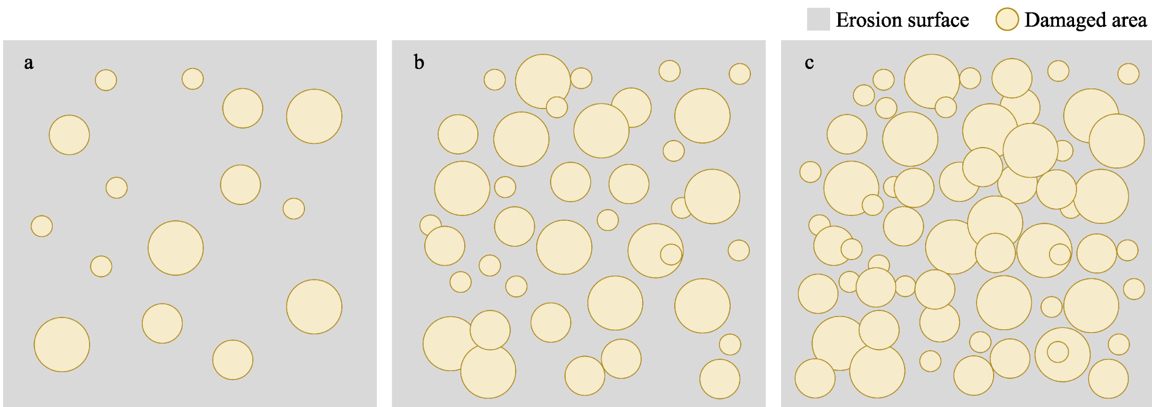


图 10 表面损伤迭代过程示意图
Fig.10 Surface damage iterative process diagram

2.3 损伤表面分形维数

分析图 3、图 4 可知，风沙粒子冲蚀损伤表面上的单个冲击损伤面很小，分散也很均匀，可以看作是有限空间上分布着有限个小几何体，利用分形分布理论[28]可以描述这一空间分布的分形维数。其表达式为：

$$P = \left(\frac{a}{A}\right)^{2-D_s} \tag{19}$$

式中：P 为单个几何体分布的概率；a 为单个几何体面积；A 为空间总面积；D_s 为分形维数。

为简化计算，将式（13）中不同粒径粒子的损伤面积 s_i 转换为加权损伤面积 s_0，即为 a。同时，空间总面积 A 为单位面积 1。已知单位面积上的冲蚀损伤总面积 A_t 即可求出损伤分布的概率 P。但表面最大分形维数与材料性质有关，故用损伤尺度系数 η 修正，η 为试验测得最大分形维数的一半。其表达式为：

$$s_0 = \sum_{i=1}^{5} \delta_i \cdot s_i \tag{20}$$

$$P = \frac{A_t}{1} \tag{21}$$

$$D = \eta\left(2 - \frac{\ln A_t}{\ln s_0}\right) \tag{22}$$

式中：s_0 为加权损伤面积，m^2；η 为损伤尺度系数；D 为损伤表面分形维数。

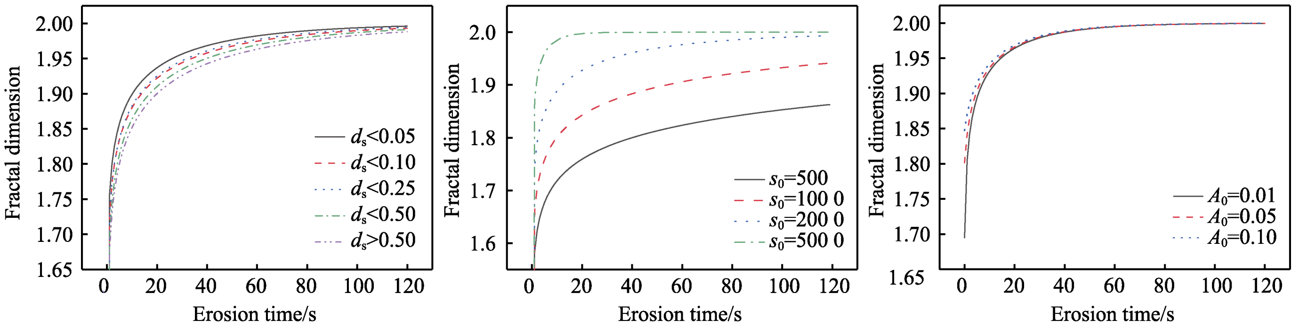
将式（17）带入式（18），式（18）带式（22）中即可得不同风沙流参数、不同冲蚀时间下损伤表面分形维数最终表达式：

$$D = \eta\left\{2 - \frac{\ln[A_{t-1} \cdot (1 - \rho_s VS') + \rho_s VS']}{\ln s_0}\right\} \quad t = 1, 2, 3, \cdots \tag{23}$$

2.4 不同参数对表面分形维数的影响

图 11 为不同变量下冲蚀损伤表面分形维数预测模型结果。分析图 11a 可知，随着粒径级配中主导粒子（占比为 50%）粒径 d_s 的增大，分形维数前期增长速度减缓。因为粒子粒径越大，单位质量中粒子总的表面积越小，冲击表面造成的损伤越少，分形维数增长越缓慢。分析图 11b 可知，随着加权损伤面积 s_0 的增大，分形维数初期增长速率增加，将更早达到最大值，但是中后期增速放缓，曲线腹部向左上角扩张。因为 s_0 的增大实际上是冲击损伤面积的增大，冲击损伤面积增大将导致表面损伤加速。但前期损伤速度快，中后期未损伤面积就会骤减，故分形维数会前期增速快，中后期增速减缓。而一切能增加风沙流能量的变化，如气流速度增加也会使 s_0 增大。分析图 11c 可知，随着冲蚀前已损伤面积比例 A_0 的增加，初始损伤面将更复杂，初始分形维数也随之增大。

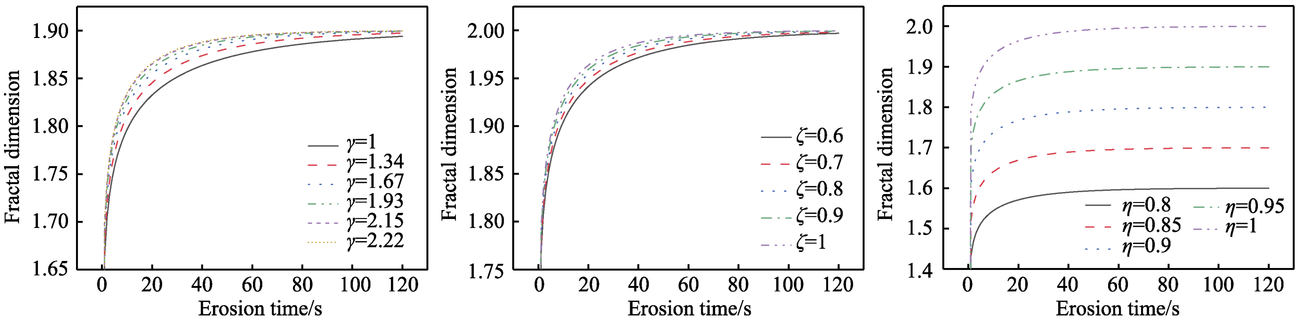
图 12 为不同系数下冲蚀损伤表面分形维数预测模型结果。分析图 12a 可知，随着接触区域形状系数 γ 的增大，分形维数初期增长速率增加，将更早达到



a 不同主导粒子粒径　　b 不同加权损伤面积　　c 不同冲蚀前已损伤面积

图 11　不同变量下理论模型的结果

Fig.11 Theoretical model results under different variables: a) different dominant particle size; b) different weighted damage area; c) different damaged area before erosion



a 不同接触区域形状系数　　b 不同有效损伤系数　　c 不同损伤尺度系数

图 12　不同系数下理论模型的结果

Fig.12 Theoretical model results under different coefficients: a) different shape coefficient of contact area; b) different effective damage coefficients; c) different damage scale coefficients

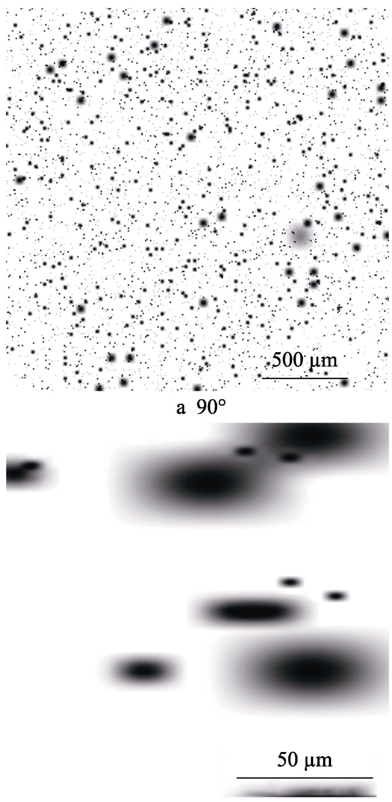
最大值，因为 γ 控制表面冲击损伤面积。分析图 12b 可知，随着有效损伤系数 ξ 的增大，分形维数初期增长速率增加，将更早达到最大值，因为 ξ 同样控制表面冲击损伤面积。分析图 12c 可知，随着损伤尺度系数 η 的增大，曲线成比例放大，最大分形维数也将增大，说明 η 被表面损伤尺度控制。

3　理论模型与试验结果对比分析

3.1　表面形貌对比分析结果

图 13a 为依据文中算法及参数随机生成的单位时间内不同粒径粒子冲击下冲蚀损伤表面的重构图像。不同粒径粒子数量使用式（8）得出，损伤面积使用式（13）得出，发生概率使用式（14）得出，用长短轴比与 γ 相同的椭圆描述不同接触区域形状系数的单粒子冲击损伤形态，如图 13b 所示。可以看出，随机生成的损伤区域分布均匀且离散，实现了不同粒径粒子冲击损伤面的叠加。

图 14 为冲蚀角度 90°、不同冲蚀时间下冲蚀损伤表面形貌的重构图像。依据本文参数，随机生成大量如图 13a 所示的单位时间的重构图像，将其按时间顺序依次叠加，即可生成不同冲蚀时间下损伤表面形貌的重构图像，还原表面损伤迭代过程。可以看出，重构图像与图 3 中实际损伤图像的变化规律相似。将图

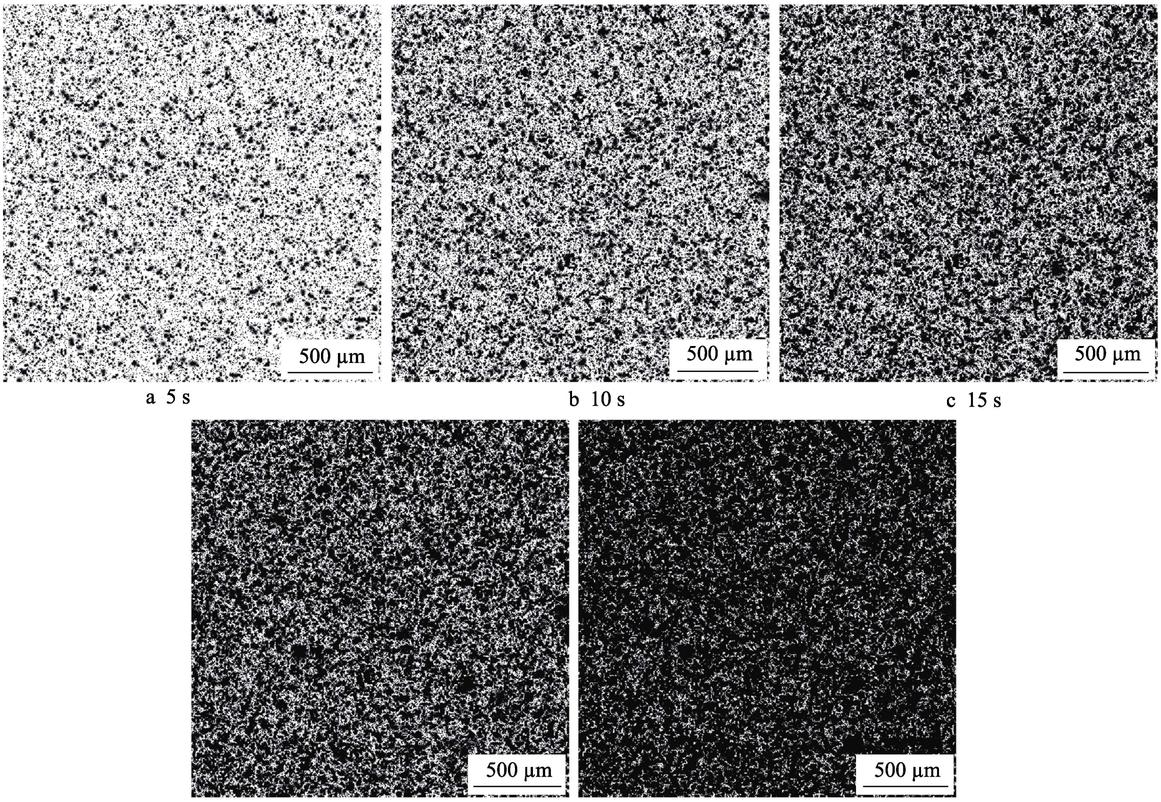


a 90°

b 15°

图 13　单位时间内不同冲蚀角度下损伤表面的重构图像

Fig.13 Reconstruction images of damage surface in unit time under different erosion angle



a 5 s　　b 10 s　　c 15 s　　d 20 s　　e 30 s

图 14　不同冲蚀时间下冲蚀损伤表面的重构图像
Fig.14 Surface reconstruction images of erosion damage under different erosion time

14 中损伤表面重构图像与图 3 中实际试验损伤图像，转为二值图（既元素仅为 0、1 的黑白图像），以避免实际损伤图像基底非白色而造成的统计误差，再分析重构图像与实际图像的余弦相似性，结果见表 8。余弦相似性[29]被大量应用于图像的相关性分析，其性质是余弦相似度越接近 1，图像越相似。可以看出，重构图像与实际损伤图像余弦相似性均大于 0.9，相似性良好。同时，当冲蚀时间达到 60 s 后，涂层表面几乎完全损伤，重构损伤表面图像也几乎被完全填充，故两者余弦相似度接近 1。

表 8　不同冲蚀时间下重构损伤图像与实际损伤图像的余弦相似性
Tab.8 Cosine similarity between reconstruction damage images and actual damage images under different erosion time

Erosion time/s	Cosine similarity
5	0.980 3
10	0.976 6
15	0.940 9
20	0.980 9
25	0.980 7
30	0.991 0
60	0.999 7
90	0.999 9
120	0.999 9

图 15 为冲蚀时间 25 s、不同冲蚀角度下冲蚀损伤表面形貌的重构图像。生成方式与图 14 相同，由于粒子冲击方向均为同向，故单位时间的重构图像为同向叠加。可以看出，重构图像与图 4 中实际损伤图像的变化规律相似；重构图像与实际图像的余弦相似性均大于 0.9，相似性良好，结果见表 9。

3.2　分形维数对比分析结果

图 16 为冲蚀角度 90°、不同冲蚀时间下冲蚀损伤表面分形维数预测结果及实际试验数据。图中理论曲线的风沙流参数与文中试验相同，初始损伤面积为 0；有效损伤系数 ξ、接触区域形状系数 γ 使用表 5、表 6 中的数据。可以看出，预测结果和试验结果基本相符，两者的相关性系数 R^2 为 0.963 4；但理论曲线左端点低于试验曲线，且理论曲线较晚达到最大值。因为涂层在冲蚀前一般会因为制备工艺或者运输造成一定程度的损伤，故初始分形维数大于 0；而 LSCM 拍摄的损伤图像清晰度有限，当冲蚀时间达到 90 s 后，表面损伤尺度已经小于像素尺度，无法识别出更多的细节，故此后实际试验的分形维数将直接达到最大值。

图 17 为冲蚀时间 25 s、不同冲蚀角度下冲蚀损伤表面分形维数预测结果及实际试验数据。图中理论曲线的风沙流参数与文中试验相同，初始损伤面积为 0；有效损伤系数 ξ、接触区域形状系数 γ 使用表 5、表 6 中的数据。可以看出，预测结果和试验结果基本

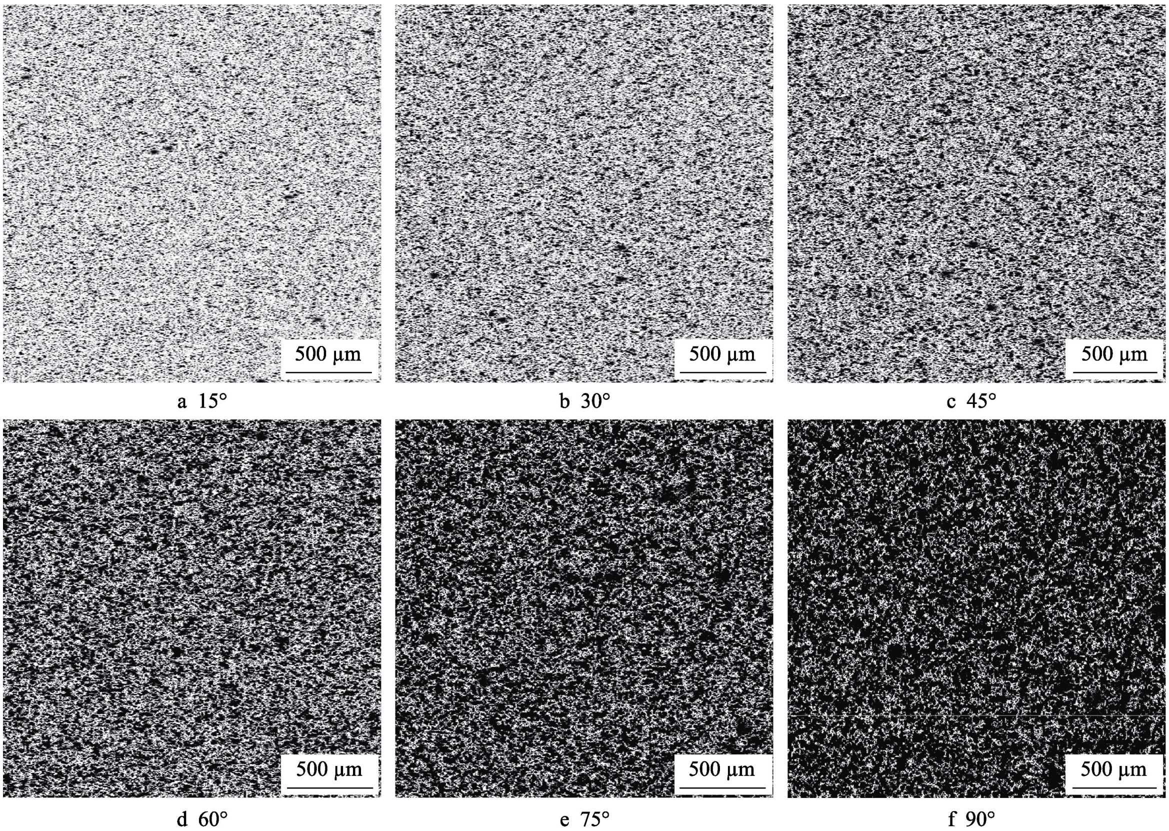


图 15　不同冲蚀角度下冲蚀损伤表面的重构图像

Fig.15 Surface reconstruction images of erosion damage under different erosion angle

表 9　不同冲蚀角度下重构损伤图像与实际损伤图像的余弦相似性

Tab.9 Cosine similarity between reconstruction damage images and actual damage images under different angle

Erosion angle/(°)	Cosine similarity
15	0.961 6
30	0.912 5
45	0.942 7
60	0.902 5
75	0.940 8
90	0.980 7

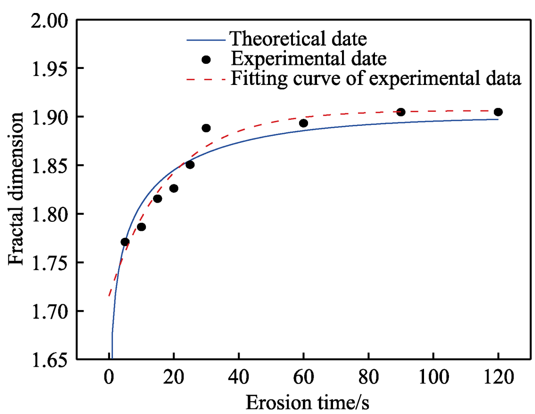


图 16　不同冲蚀时间下涂层表面的分形维数

Fig.16 Fractal dimension of coating surface under different erosion time

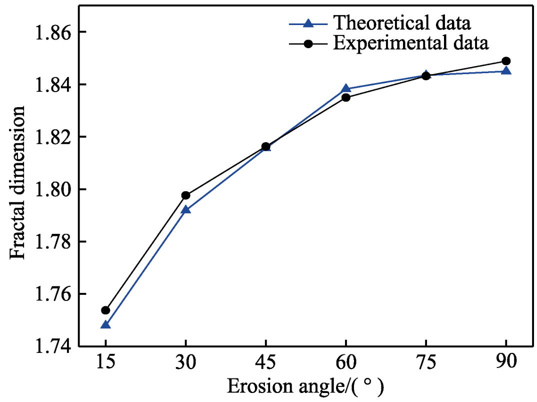


图 17　不同冲蚀角度下涂层表面的分形维数

Fig.17 Fractal dimension of coating surface under different erosion angle

相符，两者的相关性系数 R^2 为 0.987 1；但理论曲线左端点低于试验曲线，且理论曲线最大值小于实验曲线。同样是因为涂层初始分形维数大于 0，且 LSCM 拍摄的损伤图像清晰度有限，使得实际试验的分形维数会更快达到最大值。

4　结论

1）通过分析不同冲蚀时间、角度下，涂层损伤表面形貌、分形维数的演化规律，发现随着冲蚀时间、角度的增加，随机均匀分布的损伤区域逐渐叠加联

通，分形维数也随之增大，且表面分形维数存在最大值，斜角度下单粒子冲击损伤区域为彗星形。通过分析固体粒子冲蚀现象特点和试验结果，建立多粒径粒子冲击模型，发现冲蚀表面具有迭代的损伤过程，是非线性的反馈的动力学系统，表面损伤的变化率取决于上一刻损伤表面的状态。

2）考虑表面损伤的迭代过程，基于赫兹接触理论和分形分布理论，提出一种根据风沙流参数预测多粒径粒子冲击下损伤表面分形维数、重构损伤表面的方法，并分析不同参数对分形维数预测模型的影响。结果显示，主导粒子粒径 d_s 越大，分形维数初期增长速度越慢；加权损伤面积 s_0、有效损伤系数 ξ、接触区域形状系数 γ 越大，既冲击损伤面积越大，分形维数初期增长速度越快；损伤尺度系数 η 越大，分形维数最大值越大；冲蚀前已损伤面积比例 A_0 越大，初始分形维数越大。

3）基于冲蚀损伤表面分形维数预测模型，重构损伤表面、预测损伤表面分形维数，与实际试验结果对比，发现两者的演化规律相似，表面形貌余弦相似性及分形维数相关性系数均大于 0.9。结果显示，理论模型预测结果与试验结果具有较高的相似性，可以有效重构和预测涂层冲蚀损伤表面形貌及分形维数。

参考文献：

[1] 孔锋. 中国灾害性沙尘天气日数的时空演变特征(1961—2017)[J]. 干旱区资源与环境, 2020, 34(8): 116-123.
KONG Feng. Spatial and Temporal Evolution Characteristics of Days of Disastrous Dust Weather in China from 1961 to 2017[J]. Journal of Arid Land Resources and Environment, 2020, 34(8): 116-123.

[2] 李力, 魏天酬, 刘明维, 等. 冲蚀磨损机理及抗冲蚀涂层研究进展[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版), 2019, 38(8): 70-74, 91.
LI Li, WEI Tian-chou, LIU Ming-wei, et al. Research Progress on Erosion Wear Mechanism and Anti-Erosion Coatings[J]. Journal of Chongqing Jiaotong University (Natural Science), 2019, 38(8): 70-74, 91.

[3] 陈海龙, 杨学锋, 鹿重阳, 等. 固体粒子冲蚀磨损理论及影响因素的研究概述[J]. 材料导报, 2017(S2): 403-406.
CHEN Hai-long, YANG Xue-feng, LU Chong-yang, et al. Review on the Theory and Influencing Factors of Solid Particle Erosion Wear[J]. Materials Review, 2017(S2): 403-406.

[4] FINNIE I. The Mechanism of Erosion of Ductile Metals. Proceeding of the 3rd US National Congress of Applied Mechanics[J]. Wear, 1973(23): 87-96.

[5] BITTER J G A. A Study of Erosion Phenomena Part I[J]. Wear, 1963, 6(1): 5-21.

[6] LEVY A V. The Erosion of Structural Alloys, Cermets and in Situ Oxide Scales on Steels[J]. Wear, 1988, 127(1): 31-52.

[7] EVANS A G, BISWAS D R, FULRATH R M. Some Effects of Cavities on the Fracture of Ceramics: II, Spherical Cavities[J]. Journal of the American Ceramic Society, 1979, 62(1-2): 101-106.

[8] TILLY G P. A Two Stage Mechanism of Ductile Erosion[J]. Wear, 1973, 23(1): 87-96.

[9] HUTCHINGS I M. A Model for the Erosion of Metals by Spherical Particles at Normal Incidence[J]. Wear, 1981, 70(3): 269-281.

[10] 林福严, 邵荷生. 低角冲蚀磨损机理的研究[J]. 中国矿业大学学报, 1991, 20(3): 28-34.
LIN Fu-yan, SHAO He-sheng. Study on Mechanisms of Metal Erosion at Low Impact Angle[J]. Journal of China University of Mining & Technology, 1991, 20(3): 28-34.

[11] NAM P S. The Delamination Theory of Wear[J]. Wear, 1973, 25(1): 111-124.

[12] MANDELBROT B. How Long is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension[J]. Science, 1967, 156(3775): 636-638.

[13] PERSSON B N J. On the Fractal Dimension of Rough Surfaces[J]. Tribology Letters, 2014, 54(1): 99-106.

[14] LIU Yao, WANG Ya-shun, CHEN Xun, et al. Two-Stage Method for Fractal Dimension Calculation of the Mechanical Equipment Rough Surface Profile Based on Fractal Theory[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2017, 104: 495-502.

[15] NIU Li, MIAO Xu-hong, LI Yu-tian, et al. Surface Morphology Analysis of Knit Structure-Based Triboelectric Nanogenerator for Enhancing the Transfer Charge [J]. Nanoscale Research Letters, 2020, 15(1): 181.

[16] 赖勇来, 李旺, 金华兰, 等. AZ91D 镁合金耐腐蚀性膜层的腐蚀行为[J]. 表面技术, 2020, 49(12): 235-243.
LAI Yong-lai, LI Wang, JIN Hua-lan, et al. Corrosion Behavior of Corrosion Resistant Film on AZ91D Magnesium Alloys[J]. Surface Technology, 2020, 49(12): 235-243.

[17] 彭守建, 吴斌, 许江, 等. 基于 CGAL 的岩石裂隙面三维重构方法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2020, 39(S2): 3450-3463.
PENG Shou-jian, WU Bin, XU Jiang, et al. Research on 3D Reconstruction Method of Rock Fracture Surface Based on CGAL[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2020, 39(S2): 3450-3463.

[18] ZHANG Wei, LU Cheng, DONG Peng-fei, et al. Fractal Reconstruction of Microscopic Rough Surface for Soot Layer during Ceramic Filtration Based on Weierstrass-Mandelbrot Function[J]. Industrial & Engineering Chemistry Research, 2018, 57(11): 4033-4044.

[19] 胡汉儒, 李国清, 邹鸿承, 等. 冲蚀磨损表面及磨屑的分形集合[J]. 机械强度, 1995, 17(1): 1-5.
HU Han-ru, LI Guo-qing, ZOU Hong-cheng, et al. The Fractal Sets for Erosion Wear Surface and Wear Fragments[J]. Journal of Mechanical Strength, 1995, 17(1): 1-5.

（下转第 156 页）