【特约稿】

低黏度燃料介质中部分膜点接触弹流润滑分析

古乐[1]，崔海旭[1]，马芳[2]，张静静[2]，张传伟[1]，崔淑慧[1]

（1.哈尔滨工业大学 机电工程学院，哈尔滨 150001；
2.中国航发哈尔滨轴承有限公司，哈尔滨 150001）

摘 要：目的 某型发动机转子系统直接采用 JP-10 燃料对传动部件进行润滑，但燃料润滑的可靠性是限制其应用的瓶颈技术之一，因此拟研究传动部件在 JP-10 介质中的润滑状态。**方法** 建立点接触部分膜弹流模型，模型以弹流润滑理论与弹性固体接触理论为基础，应用有限差分法进行完全数值求解。通过比较在 JP-10、航空润滑油 4050 和 4109 介质中，油膜厚度、油膜压力及粗糙接触压力的分布，分析了 JP-10 的润滑性能。**结果** JP-10 形成的油膜厚度与压力均小于另外两种润滑油，JP-10 介质中的粗糙接触压力远大于另外两种润滑油中的粗糙接触压力。**结论** JP-10 的润滑性能比常用的航空润滑油弱，其润滑可靠性较低，需要采取先进表面加工技术对传动部件间的接触表面进行防护，同时在合理范围内提高流体卷吸速度，提高表面加工质量，有利于流体润滑膜的形成。

关键词：燃料润滑；点接触部分膜弹流；有限差分法；油膜厚度
中图分类号：TH117 **文献标识码：**A **文章编号：**1001-3660(2017)06-0049-06
DOI：10.16490/j.cnki.issn.1001-3660.2017.06.008

Partial EHL Analysis of Point Contact in Low Viscosity Fuel

GU Le[1], *CUI Hai-xu*[1], *MA Fang*[2], *ZHANG Jing-jing*[2], *ZHANG Chuan-wei*[1], *CUI Shu-hui*[1]

(1.School of Mechatronics Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;
2.Haring Bearing Corporation of AECC, Harbin 150001, China)

ABSTRACT: JP-10 fuel has directly used to lubricate transmission parts in certain type of aero-engine. However, reliability of fuel lubrication is one of the obstacles restricting its application. A partial EHL model of point contact was established to study lubricating conditions of the transmission parts in low viscosity fuel JP-10. Finite difference method was used to obtain numerical solution of this model, which was based on elastohydrodynamic lubrication theory and elastic contact theory. The lubricating property of JP-10 was studied by comparing distributions of film thickness, film pressure and contact pressure among JP-10, aero lubricant 4050 and 4109. The film thickness and pressure of JP-10 were lower than that of the other lubricants, while asperity contact pressure in JP-10 was higher. Either lubricating property or lubricating reliability of JP-10 was lower than that of common aero oils. Advanced surface processing techniques, higher rotating speed within reasonable limits and higher surface precision are conducive to formation of fluid lubricating film.

KEY WORDS: fuel lubrication; partial EHL of point contact; finite difference method; film thickness

燃料直接润滑是未来航天系统小型发动机提高机动特性和简化润滑系统的选择，某型发动机转子系统拟采用航空燃料 JP-10 润滑传动部件。JP-10 是综合性能非常好的高密度液体碳氢化合物，其体积能量

收稿日期：2017-04-10；修订日期：2017-05-15
Received：2017-04-10；**Revised**：2017-05-15
作者简介：古乐（1975—），男，博士，教授，主要研究方向为航空宇航摩擦学。
Biography：GU Le (1975—), Male, Doctor, Professor, Research focus: space and aerospace tribology.

密度极高，是中长期内液体冲压发动机非常理想的合成燃料[1—3]。JP-10 的分子式为 $C_{10}H_{16}$，在 JP-10 的非线性碳链结构中没有极性官能团，且在其饱和分子链中，只存在 C—C 键和 C—H 键，因此 JP-10 具有化学惰性。在室温和大气环境下，JP-10 的黏度大约为 3 mPa·s，接近水的黏度（1 mPa·s），但是远小于标准润滑油的黏度（10~1000 mPa·s）。所以很有必要对 JP-10 的润滑性能进行数值分析，作为小型发动机润滑系统简化的摩擦学依据。

目前国内外对 JP-10 的研究主要集中在其燃烧特性及制备方法等方面[4—5]，而未见将 JP-10 作为润滑剂研究其润滑性能的报道。因此，本文以部分膜弹流润滑理论与弹性固体接触理论，对 JP-10 介质中的点接触部分膜弹流进行完全数值求解，并以计算结果作为进一步分析 JP-10 润滑可靠性的理论基础。

1 基本控制方程

将滚动轴承、齿轮等零部件间的高副接触简化为点接触，进而将接触等效为一弹性球体与一刚性平面的接触。根据该模型，可得到如下的控制方程。

1.1 平均 Reynolds 方程

由于 JP-10 的润滑性能较弱，所以用全膜弹流润滑模型对其润滑特性进行分析会产生较大的误差，且与实际润滑状态不符。1978 年，Patir 和 Cheng 对粗糙表面进行数值模拟，提出平均流模型，并用该模型修正 Reynolds 方程得到平均 Reynolds 方程[6]。等温稳态的点接触部分膜弹流润滑方程为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi_x\frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\phi_y\frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial y}\right)=u\frac{\partial(\rho h_{\mathrm{T}})}{\partial x} \tag{1}$$

式中：ρ 为 JP-10 的密度；h 为名义油膜厚度；η 为 JP-10 的动力黏度；p 为形成的润滑油膜流体动压力；u 为平均流体卷吸速度；h_{T} 为局部油膜厚度，它是名义油膜厚度 h 的期望，是 h 与表面粗糙度的函数；ϕ_x 和 ϕ_y 是沿 x 和 y 方向的压力流量因子，其表达式如式（2）所示。

$$\begin{cases}\phi_x=\begin{cases}1-c\mathrm{e}^{-r(h/\sigma)} & \gamma\le 1\\ 1+c(h/\sigma)^{-r} & \gamma>1\end{cases}\\ \phi_y(h,\gamma)=\phi_x(h,1/\gamma)\end{cases} \tag{2}$$

式中：σ 为表面粗糙度的均方根；γ为表面纹理参数；c、r 为常数，见文献[6]。

1.2 局部液膜厚度

局部油膜厚度 h_{T} 是名义油膜 h 的期望，其表达式为：

$$h_{\mathrm{T}}=E(h)=\int_{-h}^{\infty}(h+\sigma)f(\delta)\mathrm{d}\delta \tag{3}$$

假设表面粗糙度高度 δ 的概率密度服从高斯分布，则 $f(\delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}$。

1.3 名义液膜厚度

名义油膜厚度是两粗糙表面中间面之间的距离，且需要考虑表面的弹性变形，其表达式为：

$$h(x,y)=h_0+\frac{x^2+y^2}{2R}+v(x,y) \tag{4}$$

式中：h_0 为中心膜厚，将根据载荷平衡条件来确定；R 为两表面的当量曲率半径；$v(x,y)$ 是点接触的二维弹性变形，它是由弹性力学中的法向分布载荷作用在半无限大空间体上引起的表面变形公式得到的，具体表达式为（5）式。

$$v(x,y)=\frac{2}{\pi E}\iint_{\Omega}\frac{p(s,t)+p_{\mathrm{a}}(s,t)}{\sqrt{(x-s)^2+(y-t)^2}}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{5}$$

式中：Ω 为求解区域；E 为两表面综合弹性模量；s 和 t 为 x 和 y 轴上的附加坐标；p 是流体动压力；p_{a} 是粗糙接触压力。

1.4 粘压方程

当液体或气体所受的压力增加，分子之间的距离减小，导致分子间的作用力增加，所以黏度增加。常用的描述黏度随压力变化规律的方程包括 Barus 方程和 Roelands 方程。当压力大于 1 GPa 后，用 Barus 粘压方程得到的黏度值过大，而 Roelands 方程更符合实际情况：

$$\eta=\eta_0\exp\left\{(\ln\eta_0+9.67)\left[-1+\left(1+5.1\times10^{-9}p\right)^{0.68}\right]\right\} \tag{6}$$

式中：η_0 为 JP-10 在常压下的黏度。

1.5 密压方程

JP-10 的密度随压力的变化关系用式（7）所示的密压方程来表示：

$$\rho=\rho_0\left(1+\frac{0.6p}{1+1.7p}\right) \tag{7}$$

式中：ρ_0 为 JP-10 在常压下的密度；p 是流体动压力（GPa）。

1.6 粗糙表面接触压力

在该分析中，假设接触表面粗糙度服从高斯分布，则粗糙表面微凸峰接触压力可由 Greenwood 和 Tripp 提出的弹性接触模型[7]进行计算：

$$p_{\mathrm{a}}=k\cdot E\cdot F_{5/2}(h/\sigma) \tag{8}$$

式中：k 为与微凸峰的分布密度。微凸峰的平均曲率半径和均方根值有关的常数，对于一般工程表面，k 可取 0.0003~0.003。当表面粗糙度服从正态分布，则 $F_{5/2}(h/\sigma)$ 可按文献[8]中的方式进行简化：

$$F_{5/2}(h/\sigma)=\begin{cases}4.4086\times10^{-5}\left(4-\dfrac{h}{\sigma}\right)^{6.804} & \dfrac{h}{\sigma}<4\\ 0 & \dfrac{h}{\sigma}\geq 4\end{cases} \tag{9}$$

1.7　载荷平衡方程

弹流问题是在给定载荷的条件下来求解压力，因此求解的压力必须满足合力等于载荷这一条件。点接触部分膜弹流润滑问题的载荷平衡方程形式为（10）式。

$$w=w_0+w_{\mathrm{a}}=\iint_{\Omega}\left[p(x,y)+p_{\mathrm{a}}(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{10}$$

式中：w 为所施加的外载荷；w_0 为流体承受的载荷；w_{a} 为粗糙接触载荷。

2　方程的离散与求解

2.1　基本控制方程的离散化

首先对上述控制方程进行无量纲化，无量纲化的目的是：简化方程组，使方程中所含变量的数目减少；使求解的通用性加强。

将求解域划分为等距网格，利用中心和向前差分格式对无量纲 Reynolds 方程进行离散化，得到离散后的差分 Reynolds 方程为：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(\Delta X)^2}\left\{(\varepsilon_x)_{i-\frac12,j}P_{i-1,j}-\left[(\varepsilon_x)_{i-\frac12,j}+(\varepsilon_x)_{i+\frac12,j}\right]P_{i,j}+(\varepsilon_x)_{i+\frac12,j}P_{i+1,j}\right\}+\frac{1}{(\Delta Y)^2}\\&\left\{(\varepsilon_y)_{i,j-\frac12}P_{i,j-1}-\left[(\varepsilon_y)_{i,j-\frac12}+(\varepsilon_y)_{i,j+\frac12}\right]P_{i,j}+(\varepsilon_y)_{i,j+\frac12}P_{i,j+1}\right\}=\frac{\overline{\rho_{i,j}}(H_{\mathrm{T}})_{i,j}-\overline{\rho_{i-1,j}}(H_{\mathrm{T}})_{i-1,j}}{\Delta X}\end{aligned} \tag{11}$$

公式（11）中：ε_x 和 ε_y 是无量纲 Reynolds 系数，$\varepsilon_x=\dfrac{\phi_x\bar{\rho}H^3}{\bar{\eta}\lambda}$，$\varepsilon_y=\dfrac{\phi_y\bar{\rho}H^3}{\bar{\eta}\lambda}$，其中 $\bar{\rho}$、H、$\bar{\eta}$ 分别为无量纲密度、膜厚和黏度，λ 为系数中的参数，是与工况和流体参数相关的常数；H_{T} 为无量纲局部油膜厚度；ΔX 和 ΔY 分别为求解域网格在 X 和 Y 方向的节点间距，对于等距网格，$\Delta X=\Delta Y$。

对无量纲膜厚方程和载荷平衡方程也按数值积分方法写成离散形式，分别如式（12）和（13）所示。

$$H_{i,j}=H_0+\frac{X_i^2+Y_j^2}{2}+\frac{2\Delta X}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}D_{ij}^{kl}P_{kl} \tag{12}$$

$$\Delta X\Delta Y\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[P_{ij}+(P_{\mathrm{a}})_{ij}\right]=\frac{2\pi}{3} \tag{13}$$

式中：D_{ij}^{kl} 为无量纲弹性系数。弹性变形的计算量较大，如采用通常的数值积分方法，在计算过程中占用的计算机存储单元多，导致计算缓慢。因此在分析中，弹性变形的计算采用 Ranger 等提出的变形矩阵的思想。在运算过程中，只需在压力迭代前计算出 D_{ij}^{kl} 矩阵并存储起来，在后续的迭代过程中反复使用该变形矩阵，避免了计算积分带来的困难，大大减少了运算工作量[9]。

2.2　方程的求解

求解部分膜弹流问题，需联立式（1）—（10）进行求解，可以看出该方程组具有高度的非线性。一般求解方法是对求解域进行网格划分，然后给定液体动压力和粗糙接触压力的初始分布，根据初始压力分布计算弹性变形，从而得到名义油膜厚度、黏度和密度，根据名义油膜厚度计算得到局部油膜厚度、压力流量因子和粗糙接触压力。将各参数代入 Reynolds 方程中求解新的压力分布，然后不断对前一次的液体动压力分布进行迭代修正，重新计算名义油膜厚度、粗糙接触压力、压力流量因子等参数进行新一轮的迭代，直到前后两次迭代的压力差在误差允许范围内，迭代结束，输出流体动压力和粗糙接触压力分布及油膜厚度分布，完成计算。

按上述方式，即使压力收敛，即两次迭代压力的相对误差小于设定值，得到的结果也未必是问题的真解，原因是压力分布的积分未必与载荷平衡。因此在计算过程中，每进行一次压力迭代，都需判断压力的合力是否与载荷平衡，即粗糙接触压力积分得到的载荷 w_{a} 与流体压力积分得到的载荷 w_0 之和是否等于无量纲载荷 w，并根据合力与载荷的大小关系对中心膜厚 h_0 进行调整：当合力小于载荷时，需要减小膜厚来增大压力，因此需减小 h_0 的值；反之则需要增大 h_0 的值。

综上，JP-10 介质中点接触部分膜弹流润滑的数值分析流程如图 1 所示。

3　算例与分析

3.1　算例

算例采用的输入参数为：当量曲率半径 R=0.02 m；综合弹性模量 E=221 GPA；JP-10 卷吸速度 u=3 m/s；载荷 w=30 N；粗糙接触压力公式（8）中的常数 k=0.001；表面粗糙度的均方根为 σ=0.5 μm；表面

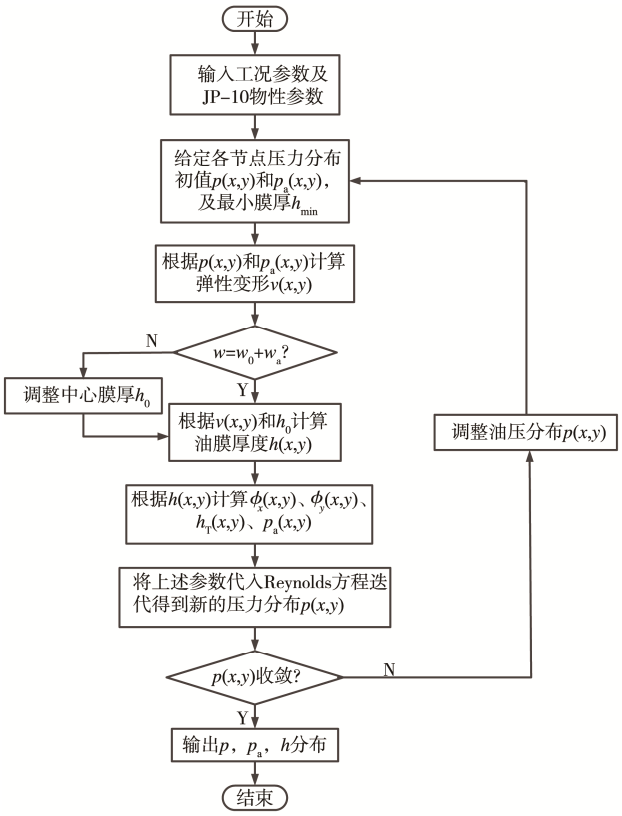


图 1　数值分析流程

Fig.1 Flow diagram of numerical analysis

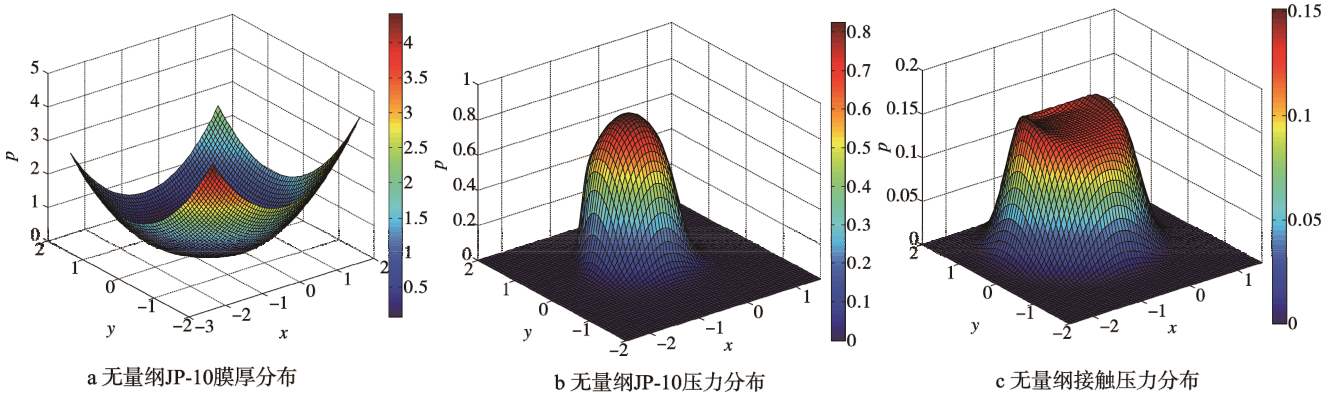
纹理参数γ=1；JP-10 的初始黏度为η_0=0.003 Pa·s；粘压系数为α=9.283×10^{-9} Pa^{-1}；求解域为 $-2.5 \le X \le 1.5$，$-2 \le Y \le 2$；x 和 y 方向网格的节点数 $N=65$；压力迭代收敛准则为两次迭代得到的 JP-10 压力分布的相对误差小于 10^{-5}。

图 2 为该工况下无量纲的 JP-10 液膜厚度、JP-10 流体压力和粗糙接触压力的三维分布图。可以看出，求解部分膜弹流得到的流体膜厚和压力分布规律类似全膜弹流得到的流体膜厚与压力分布，二者具有某些相同特征，如油膜分布类似马蹄状。粗糙接触压力的形状类似于马鞍状，其最大值在接触中心左右两侧达到，且粗糙接触压力的值小于流体润滑膜压力。计算得到：最小名义油膜厚度为 h_{min}=0.103 μm，粗糙接触载荷占总载荷的 29.47%。

3.2　润滑油对部分膜弹流特性的影响

不改变算例中的其他参数，使用另外两种常用的航空润滑油 4050 和 4109 作为润滑介质[10]，以探究润滑油对部分膜弹流润滑状态的影响并对比分析 JP-10 的润滑性能。3 种润滑油的物理参数如表 1 所示。

图 3 为三种润滑介质中的油膜厚度分布。可以看出，航空润滑油 4050 在该工况下最小油膜厚度大约为 0.8 μm，航空润滑油 4109 的最小膜厚大约为 0.6 μm，而 JP-10 的最小膜厚仅为 0.1 μm。由于 JP-10 的黏度远低于另外两种润滑油，且粘压系数也比另外两种润滑油低，这意味着即使压力增加，JP-10 黏度的增加率也低于另外两种润滑油，因此其成膜能力及润滑性能比常用的航空润滑油弱。



a 无量纲JP-10膜厚分布　　b 无量纲JP-10压力分布　　c 无量纲接触压力分布

图 2　部分膜计算结果

Fig.2 Numerical solution: (a) JP-10 film thickness distribution, (b) JP-10 pressure distribution, (c) contact pressure distribution

表 1　3 种润滑油的物理参数

Tab.1 lubrication parameters of three lubricants

Simples	Environment viscosity /(Pa·s)	Viscosity-pressure coefficient/(×10^{-8} Pa^{-1})
JP-10	0.003	0.9283
Aero lubricant 4109	0.033	1.85
Aero lubricant 4050	0.053	1.55

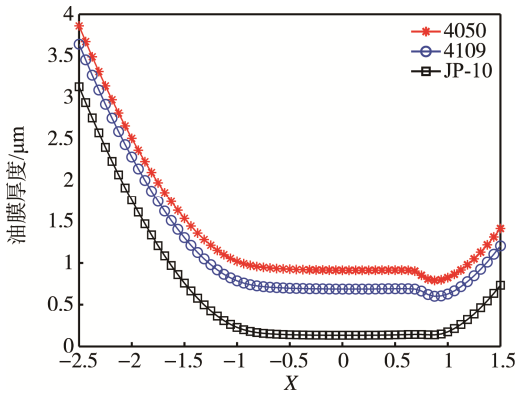
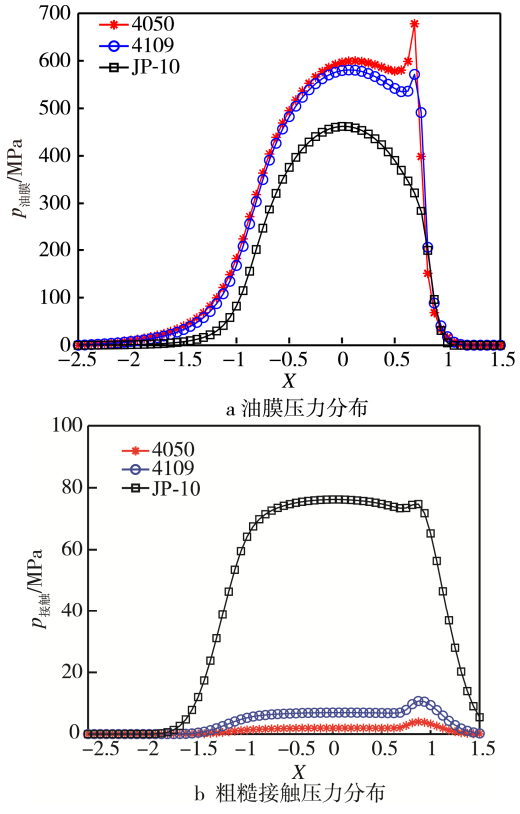


图 3　三种润滑介质中名义油膜厚度分布

Fig.3Film ThicknessDistribution in Three Lubricants

图 4 为三种润滑介质下的油膜压力及粗糙接触压力的分布。可以看出，航空润滑油 4050 在该工况下油膜最大压力约为 680 MPa，航空润滑油 4109 形成的油膜最大压力约为 580 MPa，而 JP-10 油膜的最大压力约为 460 MPa。JP-10 形成的油膜厚度低于另外两种润滑油，其压力也低于另外两种润滑油，说明相同条件下，JP-10 润滑膜的承载能力低，其润滑性能较弱。航空润滑油 4050 和 4109 可以在流体出口区形成明显的二次压力峰，而 JP-10 未见明显的二次压力峰。在 JP-10 介质中，粗糙接触压力的值远大于另外两种润滑油介质中的粗糙接触压力值，粗糙接触承受的载荷较大，两表面的直接接触面积较大。



a 油膜压力分布

b 粗糙接触压力分布

图 4　3 种润滑介质中油膜压力和粗糙接触压力分布

Fig.4 Film pressure distribution and contact pressure distribution in three lubricants

通过对相同工况下三种不同润滑介质中的部分膜弹流进行数值求解，可以得出，相比于常规的航空润滑油，JP-10 的成膜能力及润滑性能弱，在 JP-10 介质中，粗糙接触承受的载荷占总载荷的比例较大，说明两表面间有许多微凸峰直接接触，因此两表面容易发生较严重的磨损。如果使用 JP-10 对传动部件进行润滑，特别是工况较为严苛时，应该对两表面进行适当的防护，防止表面迅速磨损导致的传动失效。

3.3　速度对部分膜弹流特性的影响

不改变算例中的其他参数，只改变卷吸速度，以探究流体卷吸速度对部分膜弹流润滑状态的影响。除了上述工况外，增加 4 组卷吸速度，u=2、2.5、3.5、4 m/s。

图 5 反映了最小油膜厚度及粗糙接触载荷占总载荷的比例随 JP-10 卷吸速度的变化规律，可以看到，不改变其他条件，随着 JP-10 的卷吸速度增大，最小油膜厚度逐渐增大，而粗糙接触载荷占总载荷的比例逐渐减小。这是由于随着油膜厚度的增加，越来越多的微凸峰被流体分开，粗糙接触载荷随之减小。根据计算结果，可以得出卷吸速度有利于流体润滑膜的形成。在实际应用中，要综合考虑摩擦和热等因素，在合理的范围内提高卷吸速度，有利于形成有效的润滑油膜。

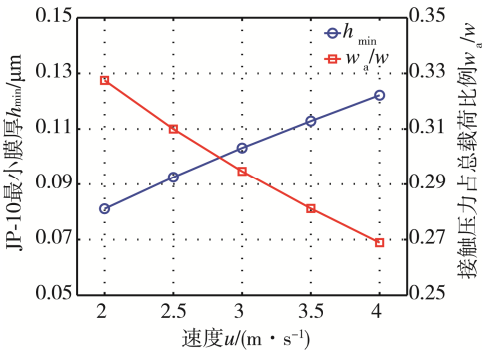


图 5　卷吸速度对最小膜厚及粗糙接触压力占总载荷比例的影响

Fig.5 Influence of involution velocity on minimum film thickness and contact pressure ratio

3.4　表面粗糙度对部分膜弹流特性的影响

不改变算例中的其他参数，只改变表面粗糙度的均方根，以探究接触表面粗糙度对部分膜弹流润滑状态的影响。除了上述工况外，增加 4 组粗糙度均方根 σ=0、1、1.5、2 μm。当 σ=0 μm 时，假设两接触表面均为光滑表面，不存在粗糙接触，需用全膜弹流润滑模型对该工况进行数值求解。

图 6 反映了最小油膜厚度及粗糙接触载荷占总载荷的比例随表面粗糙度均方根值的变化规律。可以看出，不改变其他条件，随着粗糙度均方根值的增大，无

量纲最小名义油膜厚度逐渐增大，粗糙接触载荷占总载荷的比例逐渐增大。该趋势与文献[11]中得到的结论相同。虽然表面粗糙度均方根增大，最小名义油膜厚度也增大，但是其增大的趋势小于粗糙度均方根值的增大趋势，因此随着粗糙度均方根值的增大，微凸峰尺寸变大，微凸峰的接触面积随之增大，导致粗糙接触载荷占总载荷的比例也随之增大。因此在应用中，应尽量减小两接触表面的粗糙度，在必要时可在接触表面制备涂层，防止接触载荷过大造成的严重磨损。

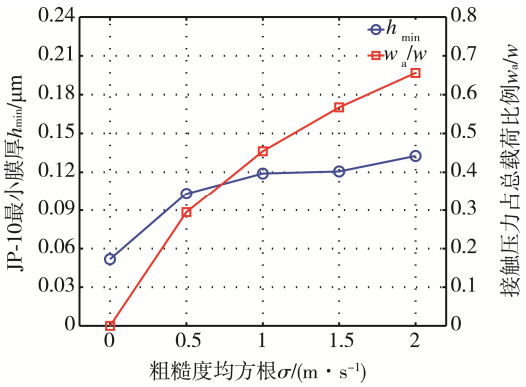


图 6　粗糙度均方根对最小膜厚及粗糙接触压力占总载荷比例的影响

Fig.6 Influence of RMSRoughness on Minimum Film Thickness and Contact Pressure Ratio

4　结论

1）相同的工况下，JP-10 润滑膜的最小厚度仅为航空润滑油 4050 最小膜厚的 1/8，为 4109 最小膜厚的 1/6。JP-10 润滑膜的压力也比另外两种航空润滑油的油膜压力小，而且在 JP-10 介质中，粗糙接触压力远大于另外两种润滑介质中的粗糙接触压力。

2）在传动部件设计与应用中，在合理范围内提高卷吸速度和表面加工质量，可得到较好的润滑效果。必要时可在接触表面制备涂层，对表面进行合理的防护。

参考文献：

[1] 邹吉军, 郭成, 张香文, 等. 航天推进用高密度液体碳氢燃料: 合成与应用[J]. 推进技术, 2014, 35(10): 1419—1425.
ZOU Ji-jun, GUO Cheng, ZHANG Xiang-wen, et al. High-density Liquid Hydrocarbon Fuels for Aerospace Propulsion: Synthesis and Application[J]. Journal of Propulsion Technology, 2014, 35(10): 1419—1425.

[2] LI S C, VARATHARAJAN B, WILLIAMS F A. Chemistry of JP-10 Ignition[J]. AIAA(American Institute of Aeronautics and Astronautics) Journal, 2001, 39: 2351 —2356.

[3] JIAO C Q, DEJOSEPH J C A, GARSCADDEN A. Dissociative Ionization of JP-10(C10H16) by Electron Impact[J]. International Journal of Mass Spectrometry 2007, 266: 92—96.

[4] 王贞, 卫豪, 贺芳, 等. 高密度合成烃类燃料进展研究[J]. 导弹与航天运载技术, 2011(3): 41—46.
WANG Zhen, WEI Hao, HE Fang, et al. Development of High-density Synthesized Hydrocarb on Fuel[J]. Missiles and Space Vehicles, 2011(3): 41—46.

[5] RAO P N, KUNZRU D. Thermal Cracking of JP-10: Kinetics and Product Distribution[J]. Journal of Analytical and Applied Pyrolysis, 2006, 76: 154—160.

[6] PATIR N, CHENG H S. An Average Flow Model for Determining Effects of Three-dimensional Roughness on Partial Hydrodynamic Lubrication[J]. Journal of Tribology, 1978, 100(1): 12—17.

[7] GREENWOOD J A, TRIPP J H. The Contact of Two Nominally Flat Rough Surfaces[J]. ARCHIVE Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1970(185): 625—634.

[8] 吴兵, 温泽峰, 王衡禹, 等. 高速轮轨水介质存在下的粘着特性数值研究[J]. 工程力学, 2014, 31(9): 219—224.
WU Bing, WEN Ze-feng, WANG Heng-yun, et al. Numerical Study on Adhesion of Wheel and Rail at High Speed under Wet Condition[J]. Engineering Mechanics, 2014, 31(9): 219—224.

[9] 黄平. 弹性流体动压润滑数值计算方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2013.
HUANG P. Numerical Calculation Methods of Elastohydrodynamic Lubrication[M]. Beijing: Tsinghua University Pess, 2013.

[10] 史修江, 王黎钦, 古乐, 等. 基于拟动力学的航空发动机主轴球轴承热弹流润滑分析[J]. 航空动力学报, 2016, 31(1): 233—240.
SHI Xiu-jiang, WANG Li-qin, GU Le, et al. Thermal Elastohydrodynamic Lubrication Analysis of Aero-engine Mainshaft Ball Bearing Based on Quasi-dynamic[J]. Journal of Aerospace Power, 2016, 31(1): 233—240.

[11] ZHU D, LIU Y, WANG Q. On the Numerical Accuracy of Rough Surface EHL Solution[J]. Tribology Transactions, 2014, 57(4): 570—580.